

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RODRIGO HENRIQUE BOSCO

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM ANÁLISE DE COINTEGRAÇÃO
E MODELOS DE HETEROCEDASTICIDADE CONDICIONAL**

CURITIBA
2016

RODRIGO HENRIQUE BOSCO

**OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM ANÁLISE DE COINTEGRAÇÃO
E MODELOS DE HETEROCEDASTICIDADE CONDICIONAL**

Monografia apresentada como requisito parcial
à obtenção do grau de bacharel no Curso de
Ciências Econômicas, Setor de Ciências Sociais
Aplicadas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. João Basílio Pereima
Neto

CURITIBA
2016

TERMO DE APROVAÇÃO

OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS COM ANÁLISE DE COINTEGRAÇÃO E MODELOS DE HETEROCEDASTICIDADE CONDICIONAL

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas, Setor de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Basilio Pereima Neto
(Orientador/UFPR)

Prof. Dr. José Wladimir Freitas da Fonseca
(Examinador/UFPR)

Prof. Dr. Marcos Minoru Hasegawa
(Examinador/UFPR)

Curitiba, 07 de Dezembro de 2016.

Aos meus familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de estudar. Agradeço aos meus pais Edna e Valdecir assim como ao tio Ivo pelo carinho e consideração ao me escutar falar sobre o tema da minha monografia mesmo sem entender nada, e por todo apoio durante esse quatro anos de estudo. Agradeço aos professores do departamento de economia e especialmente ao meu orientador e amigo João Basilio pelo incentivo e pela oportunidade de estudar o assunto que mais gosto. Por fim agradeço aos meus amigos Ana, José e Luiz Felipe, pois sem eles a faculdade não seria a mesma e também ao meu amigo do NeX Luiz Neduziak pelo companheirismo e suas dicas de estudo.

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

Charles Chaplin

RESUMO

A presente monografia tem por objetivo compor um portfólio de ações indexado ao índice MSCI Brazil *Index*, para ser utilizado na administração de investimentos de longo prazo. Para atingir esse objetivo será abordada uma metodologia diferente da especificada por Markowitz em relação a fronteira eficiente, neste trabalho será utilizado um modelo de cointegração para seleção do portfólio e determinação de seus pesos dentro da carteira utilizando otimização por Mínimos Quadrados Ordinários e Programação Quadrática. A análise de risco será feita por meio da modelagem de séries temporais ARCH e GARCH enquanto a estimativa de retorno será feita pela média aritmética dos retornos no tempo. O portfólio proposto por esse trabalho é composto somente por ações negociadas na Bovespa sem vendas a descoberto ou negociações a prazo, sendo assim, um portfólio de ativos a vista. Para simplificação do conteúdo a ser exposto a carteira conterá somente 3 ativos, podendo ser adaptada para um número maior ou menor de ativos de acordo com as necessidades do investidor.

Palavras-chave: séries temporais, retorno, volatilidade, cointegração.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 -	Preço MSCI Brazil Index	17
Figura 2.2 -	Retono MSCI Brazil Index	18
Figura 4.1 -	Logaritmo de Preço dos Ativos	41
Figura 4.2 -	Modelo de Cointagração para o Índice e Carteira 9	44
Figura 4.3 -	Pesos Ótimos	52
Figura 4.4 -	Volatilidade BBSE3	53
Figura 4.5 -	Volatilidade NATU3	53
Figura 4.6 -	Volatilidade CCRO3	54
Figura 4.7 -	Correlação entre os Ativos da Carteira 9	57
Figura 4.8 -	Estimativa de Risco Carteira 9	58
Figura 4.9 -	Estimativa de Risco Carteira 9 e BBSE3	59
Figura 4.10 -	Estimativa de Risco Carteira 9 e NATU3	59
Figura 4.11 -	Estimativa de Risco Carteira 9 e CCRO3	60
Figura 4.12 -	Value at Risk para Carteira 9	61
Figura 4.13 -	Teste Retroativo: Retorno índice e Carteira 9 balanceada	64
Figura 4.14 -	Teste Retroativo: Retorno índice e Carteira 9 fixa	65
Figura 4.15 -	Histograma Resíduos Modelo Carteira 9 balanceada	66
Figura 4.16 -	Histograma Resíduos Modelo Carteira 9 fixa	67
Figura 4.17 -	Dispersão Retorno MSCI versus Carteira 9	68
Figura 4.18 -	Teste Retroativo VaR Carteira 9 - $\alpha = 95\%$	69
Figura 4.19 -	Teste Retroativo VaR Carteira 9 - $\alpha = 99\%$	69
Figura 4.20 -	Retorno Acumulado MSCI Brazil e Carteira 9	72
Figura 4.21 -	Desvio Padrão do Retorno Índice MSCI Brazil e Carteira 9	72
Figura 4.22 -	Correlação índice MSCI a vista e futuro	74
Figura 4.23 -	Taxa Ótima de Hedge	74
Figura 24 -	Correlograma Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH BBSE3	79
Figura 25 -	ARCH LM Test Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH BBSE3	80
Figura 26 -	Histograma Resíduos ARCH-GARCH BBSE3	81
Figura 27 -	Correlograma Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH CCRO3	82

Figura 28 -	ARCH LM Test Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH CCRO3	83
Figura 29 -	Histograma Resíduos ARCH-GARCH CCRO3	84
Figura 30 -	Correlograma Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH NATU3 .	85
Figura 31 -	ARCH LM Test Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH NATU3	86
Figura 32 -	Histograma Resíduos ARCH-GARCH NATU3	87

LISTA DE TABELAS

4.1	Possibilidades de Carteiras	40
4.2	Análise de Regressão de MQO por Carteira	41
4.3	Teste de Dickey-Fuller para Resíduos de Regressão	43
4.4	Teste de Johansen	45
4.5	Teste de Johansen - Número de Vetores de Cointegração Carteira 9	46
4.6	Resultados Modelo de Regressão com Restrição	48
4.7	Volatilidade de Longo prazo	49
4.8	Análise de Correlação Carteira 9	50
4.9	Retorno esperado	50
4.10	Pesos Ótimos - Ativos da Carteira 9	51
4.11	Modelo ARCH-GARCH - Ativo BBSE3	55
4.12	Modelo ARCH-GARCH - Ativo NATU3	56
4.13	Modelo ARCH-GARCH - Ativo CCRO3	56
4.14	Previsão Value at Risk	62
4.15	Pesos ótimos	64
4.16	Modelo Regressão - Carteira Balanceada	65
4.17	Modelo Regressão - Carteira Fixa	65
4.18	Teste ARCH LM - Heterocedasticidade Condicional	67
4.19	Value at Risk de Longo prazo	70
4.20	Exceções VaR a 99% e 95%	70
4.21	Retorno Carteira 9	71

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	TEORIA DAS FINANÇAS	14
2.1	Mercados Eficientes	14
2.2	Administração Ativa e Passiva de Carteira	15
2.2.1	MSCI Brazil Index	16
3	Carteira Cointegrada	19
3.1	Risco versus Retorno	19
3.2	Modelo de Seleção com Base na Cointegração	20
3.2.1	Procedimento 1 - Seleção de Ativos	22
3.2.2	Procedimento 2 - Determinação dos Pesos	26
3.2.3	Procedimento 3 - Análise de Risco	30
3.2.4	Procedimento 4 - Estimativa de Retorno e Correlação de uma carteira cointegrada	34
3.2.5	Procedimento 5 - Análise da Performance Retroativa da Carteira	38
4	ESTIMATIVAS ECONOMETRICAS	40
4.1	Modelos de Cointegração	40
4.2	Peso Ótimo	47
4.3	Modelos de Risco	52
4.4	Teste de Performance Retroativa <i>backtest</i>	63
4.5	Taxa Ótima de <i>Hedge</i>	73
4.6	Considerações Finais	75
	REFERÊNCIAS	77
	APÊNDICE	79

1. INTRODUÇÃO

A pressuposição de que o mercado acionário é eficiente, onde toda informação disponível, pública e privada é refletida imediatamente no preço, é chamada de hipótese da forma forte de eficiência do mercado. Baseado neste pressuposto toda e qualquer informação passada não pode ser utilizada para previsão de preço ou retornos de ativos financeiros, já que as informações já foram incorporadas ao preço. A seleção de ativos para composição de um portfólio ainda é um importante problema para os investidores. Métodos como análise de risco e retorno e construção da fronteira eficiente proporcionam maior rigor formal para o investidor na escolha dos ativos, no entanto, para o cálculo da fronteira eficiente utilizam-se os pesos e as correlações entre estes, que no curto prazo podem sofrer fortes oscilações fazendo com que a carteira que é ótima em determinado período não seja em outro. O problema então se resume em selecionar uma carteira, onde a relação de longo prazo entre os retornos dos ativos membros se mantenha razoavelmente constante no tempo, podendo resultar em menores custos de manutenção para mantê-la ótima.

Por esse motivo propõe-se a utilização de modelos de cointegração para seleção dos ativos da carteira indexada a algum *benchmark* de escolha do investidor. O modelo de cointegração mensura a relação de longo prazo entre os ativos e o *benchmark*. Tendo como objetivo propor uma carteira de ativos de baixo risco e boas expectativas de pagamento de dividendos, este trabalho se empenha em três frentes de atuação na escolha dos ativos e composição do portfólio: seleção dos ativos e seus respectivos pesos, estimativa de risco e estimativa de retorno. Através do modelo de cointegração busca-se construir uma carteira passiva de ações indexada ao índice MSCI Brazil, onde o peso de cada ativo no portfólio será definido pelo método de otimização por Mínimos quadrados Ordinários e programação quadrática confrontando os resultados para determinação do mais adequado. A estimativa de risco é feita diariamente por modelagem de séries temporais ARCH e GARCH, acrescentada ao Value at Risk para mensuração da volatilidade diária do patrimônio dada uma certa probabilidade. Por último realiza-se estimativas de retorno do portfólio, utilizando a média aritmética dos retornos passados como previsão do retorno de equilíbrio. É visto que pela eficiência de mercado, dados passados não podem ser utilizados para previsão de preços ou retornos, no entanto, estimativas podem ser feitas, adotando a

média aritmética como estimador consistente de retornos.

Este trabalho é dividido em duas partes, desta introdução ao capítulo 3 corresponde a primeira parte referente a descrição teórica dos procedimentos econométricos, enquanto a segunda parte que compreende o capítulo 4 se encarrega das estimativas empíricas para um exemplo de carteira utilizando os procedimentos propostos. Dentro da descrição teórica, o próximo capítulo é dividido em três seções, onde a primeira seção aborda a hipótese dos mercados eficientes, a segunda compara carteiras ativas e passivas e qual a melhor opção caso seja assumido o pressuposto de mercado eficientes e a última seção discorre sobre o índice utilizado como *benchmark* para indexação do portfólio. O terceiro capítulo faz uma análise da metodologia estatística, trazendo na primeira seção uma discussão sobre risco versus retorno e o método de fronteira eficiente, a segunda seção esboça o modelo de cointegração e os procedimentos utilizados para seleção e composição de carteira junto com as estimativas de risco e retorno, encerrando a descrição teórica dos modelos utilizados. Por fim, o capítulo 4 seguido das considerações finais se encarrega das estimativas econométricas para construção de um portfólio com base nos métodos descritos.

2. TEORIA DAS FINANÇAS

Este capítulo tem o objetivo de abordar o pressuposto dos mercados eficientes e explicitar como este se encaixa na análise a ser feita para composição do portfólio. O pressuposto dos mercados eficientes proporciona embasamento para análise de risco e retorno como será mostrado mais adiante e nos próximos capítulos.

2.1 Mercados Eficientes

Com base na pressuposição de que o mercado acionário é eficiente, onde toda informação disponível, pública e privada é refletida imediatamente no preço, temos a hipótese da forma forte de eficiência do mercado (Fama, 1970). Na forma forte assume-se que nenhum indivíduo possui informação privilegiada para obter retorno excedente acima do normal, sendo assim, os retornos deveriam seguir um passeio aleatório refletindo não a irracionalidade do mercado, mas sim a tentativa racional dos investidores de obter retornos excedentes. O pressuposto de que o mercado segue a forma forte de eficiência e consequentemente a aceitação de que não há uso de informação privilegiada por alguns investidores (*fair game*) resulta em um modelo de passeio aleatório dos retornos, onde este é uma versão mais restrita do modelo de jogo justo, supondo que os retornos são independentes e identicamente distribuídos. Neste trabalho a hipótese de eficiência forte de mercado mostra-se presente em determinado grau, mesmo que esta não reflita adequadamente a realidade, observa-se que os retornos na maioria dos casos seguem um passeio aleatório com a mesma distribuição de probabilidade, porém, são independentes, ou seja, o retorno do período anterior não pode ser utilizado para prever o retorno dos períodos seguintes. A hipótese de eficiência da forma forte assume que não há possibilidade de se obter retornos excedentes, pois no exato momento que houvesse algum ativo com possibilidade de obtenção de retorno acima do normal, o mercado se adiantaria adquirindo o referido ativo eliminando assim qualquer possibilidade de obtenção de retornos excedentes ao do mercado (Bodie et.al, 2010).

Este trabalho propõe um portfólio de ações de empresas de grande porte, pelo fato das grandes empresas não escaparem aos “olhos” do mercado, muito provavelmente

qualquer nova informação a respeito das empresas sugeridas será rapidamente incorporada ao preço, portanto, neste trabalho a eficiência na correção dos preços pode estar bastante presente. Como descrito em [Bodie et.al \(2010\)](#) empresas de baixa capitalização podem proporcionar retornos maiores quando comparadas com empresas de grande capitalização, porém, no presente trabalho não serão utilizadas empresas de baixa capitalização para compor o portfólio.

Estendendo a discussão quanto a eficiência de mercado e racionalidade, a teoria das expectativas racionais se insere no contexto do mercado financeiro pois pode ser entendida como a previsão ótima utilizando todas as informações disponíveis. A Eficiência de Mercado, é de certa forma uma extensão para o mercado financeiro da hipótese das expectativas racionais, onde, no mercado financeiro toda e qualquer oportunidade de lucro inexplorada será rapidamente eliminada pelo mercado ([Mishkin, 1998](#)). Por último devido ao pressuposto de rápido ajustes de preços pelo mercado, a análise técnica para seleção de ativos ou *timing* de compra ou venda será desconsiderado, já que retornos passados dificilmente podem ser utilizados para previsão de retornos futuros.

De acordo com [Elton et.al \(2012\)](#) o modelo de passeio aleatório é uma versão restrita da hipótese de eficiência da forma forte *fair game*, pois considera que os retornos dos ativos são independentes e indenticamente distribuídos, sendo representado algebricamente abaixo de acordo com [Morettin & Tolo \(2006\)](#):

$$r_t = \mu + \sigma \epsilon_t \quad (2.1)$$

onde, $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, r_t é o retorno do ativo no período t , μ é a média dos retornos, σ é a volatilidade do retorno do ativo e ϵ é o termo de erro aleatório com distribuição de probabilidade normal.

Neste modelo podemos supor que a média dos retornos μ é igual a zero e que a volatilidade do ativo σ varia com o tempo, ou seja, verifica-se a existência de heterocedasticidade condicional.

2.2 Administração Ativa e Passiva de Carteira

Em uma carteira de ativos administradas ativamente o gestor da carteira procura ineficiências do mercado refletidas em ativos subavaliados, com expectativa de obter

retornos excedentes ao do mercado. Na administração ativa de portfólio além de selecionar os ativos que irão compor a carteira o gestor se encarrega procurar o melhor *timing* para adquirir os ativos. Podemos diferenciar administração ativa de administração passiva de portfólio pela seguinte distinção: quando se utiliza dados passados para composição da carteira temos administração passiva, e quando se realiza previsões para seleção de ativos temos a administração ativa (Elton et.al, 2012). Tomado o pressuposto de eficiência de mercado, fica evidente que esforços para seleção ativa de ativos podem ser inúteis, dado que qualquer oportunidade de retorno acima da média do mercado seria no mesmo momento eliminado pela competição acirrada entre os investidores. Assim a administração passiva de portfólio entra em conformidade com a hipótese de eficiência de mercado, pelo fato de que a gestão passiva não tenta suplantear o mercado, mas refletir os retornos de um determinado *benchmark*. A carteira passiva geralmente é indexada a índices de mercado como o ibovespa, visando estabelecer um portfólio bem diversificado de ações com o objetivo também de reduzir os altos custos de transação que são inerentes a carteiras administradas ativamente (Bodie et.al, 2010).

De acordo com Duarte Junior (2005), a administração passiva de carteiras não requer áreas de pesquisa quantitativa e especializadas em análise setorial, assim como aumenta a transparência na gestão e permite a alocação de recursos em ativos de alta liquidez facilitando também a atuação do portfólio em mercados internacionais. Pelos motivos aqui apresentados é que o presente trabalho propõe um portfólio de ações brasileiras indexado ao MSCI Brazil Index. O índice MSCI Brazil é anualmente reavaliado tendo em sua composição ações de empresas com boas expectativas de retornos e alta liquidez. O MSCI Brazil Index é uma sugestão de *benchmark*, o investidor pode escolher o *benchmark* que melhor se adapte as suas necessidades. Uma breve descrição do MSCI Brazil é apresentada a seguir.

2.2.1 MSCI Brazil Index

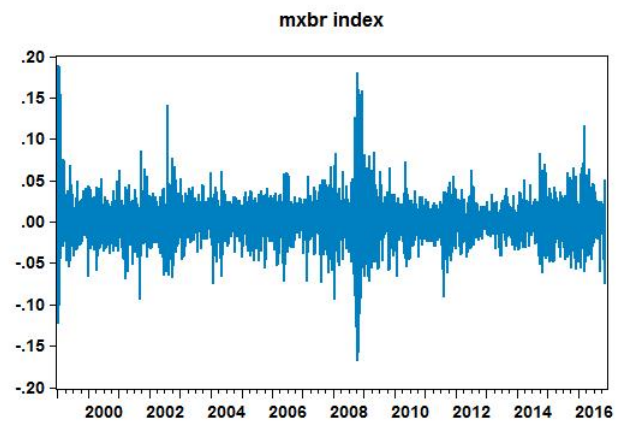
O MSCI Brazil Index é um índice da Morgan Stanley Capital International que serve de referência como *benchmark* para a administração de carteiras, sendo baseado em ações de alta e média capitalização do mercado brasileiro, este índice cobre aproximadamente 85% do mercado de ações no Brasil (MSCI, 2016). Este índice mensura o

desempenho de empresas de média e alta capitalização de mercado, sendo composto por ações *free float*, que revisa a cada 12 meses sua performance omitindo do cálculo ativos que podem deteriorar os fundamentos do índice (MSCI, 2016). Algumas das características relevantes deste índice que o elegeu como *benchmark* do portfólio, diz respeito ao seu critério de seleção de ativos com base no valor de mercado, critérios de capitalização da empresa e liquidez, diferentemente do ibovespa que considera somente número de negociações e o número de transações. O MSCI Brazil é composto por 60 ativos sendo alguns deles Itaú Unibanco, Ambev, Petrobrás, Vale e Cielo, seu portfólio é frequentemente reestruturado e este índice é também utilizado como *benchmark* por fundos de investimento de administração passiva. Portanto, os parâmetros de seleção de ativos do MSCI Brazil com base no valor de mercado e o balanceamento do índice a cada 12 meses foram critérios decisivos para a escolha do MSCI Brazil como *benchmark* do portfólio. Infelizmente a composição do índice não está disponível gratuitamente para ser visualizada. As figuras abaixo mostram a cotação e retorno do índice respectivamente para o período de janeiro de 1999 a 18 de novembro de 2016.

Figura 2.1: Preço MSCI Brazil Index



Figura 2.2: Retono MSCI Brazil Index



3. Carteira Cointegrada

Este capítulo tem por objetivo explicitar a metodologia utilizada para a seleção de ativos para compor um portfólio linear de ativos adquiridos a vista por meio da cointegração. Para facilitar os cálculos restringiu-se o tamanho da carteira para três ativos, cuja natureza são ações preferenciais ou ordinárias negociadas no mercado brasileiro de ações. A primeira seção trata da metodologia convencional de alocação de ativos, baseada na análise risco e retorno utilizada na construção da fronteira eficiente, em seguida temos a seleção de carteiras com base em modelos de cointegração que tem como objetivo indexação do portfólio e seleção dos ativos que farão parte da sua composição, as próximas seções tratam da determinação dos pesos, mensuração do risco dos ativos e do portfólio e estimativa dos retornos esperados e teste de performance retroativa para os ativos selecionados e para a carteira.

3.1 Risco versus Retorno

A composição da carteira ótima de ativos de renda variável, passa necessariamente pela diversificação dos ativos segundo critérios estabelecidos pelo investidor ou gestor da carteira. Podemos atribuir a diversificação uma redução considerável do risco de carteira, porém, o risco mantido após ampla diversificação é conhecido como risco de mercado ou sistemático, que depende de fatores macroeconômicos e das condições da economia em geral, que em grande parte dos casos não pode ser prevista com clareza (Bodie et.al, 2010). A diversificação da carteira é feita com base nos retornos dos ativos definido abaixo:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (3.1)$$

onde r_t é o retorno no período t , P_t é o preço no período t , P_{t-1} é o preço no período $t - 1$ e D_t é o dividendo no período t .

Temos que o retorno do portfólio pode ser especificado da seguinte forma (Elton et.al, 2012):

$$R_p = E(R_p) = E \left(\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i R_{i,j} \right) \quad (3.2)$$

onde R_p é o retorno do portfólio, $E(R_p)$ é o retorno esperado do portfólio, ω_i é o peso de cada ativo na carteira e $R_{i,j}$ é o retorno esperado de cada ativo individualmente.

Utilizando os retornos determinamos o risco do portfólio da seguinte forma simplificada para carteira com dois ativos (Elton et.al, 2012):

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 \quad (3.3)$$

onde σ_p^2 é a variância do portfólio, ω_1 é o peso do ativo 1, ω_2 é o peso do ativo 2, σ_1^2 é a variância dos retornos do ativo 1, σ_2^2 é a variância dos retornos do ativo 2 e $\rho_{1,2}$ é a correlação entre os ativo 1 e 2.

É importante ressaltar que a equação do risco especificada acima pode ser generalizada para qualquer número de ativos. Pela equação acima, notamos que o risco do portfólio depende não somente do risco individual de cada ativo, mas também da covariância e dos pesos de cada ativo na carteira. No entanto, a covariância entre os ativos assim como os pesos ω_i podem mudar em um horizonte de curto prazo, trazendo problemas para mensuração do risco e elevando os custos de manutenção do portfólio, já que alguns ativos podem ser substituídos ou realocados afim de manter o peso constante. Nesse caso este trabalho propõe a seleção de ativos e a definição de cada peso individual no portfólio com base no modelo de cointegração, abordado na próxima seção.

3.2 Modelo de Seleção com Base na Cointegração

O problema básico na seleção de portfólios e análise de investimentos é a proporção risco-retorno da carteira. Cada investidor individualmente está disposto a assumir um determinado risco para obter determinado retorno, por exemplo, para um investidor amante ao risco não há problemas em assumir um risco maior que o da carteira de mercado caso o retorno esperado também seja maior. É importante ter em mente que cada investidor busca maximizar sua função de utilidade individual, onde os parâmetros são risco e retorno dada uma restrição orçamentária. Visto a dificuldade de obter a função de utilidade para o agregado dos investidores, e de selecionar a melhor relação risco-retorno, propõe-se a análise de cointegração para seleção e indexação da carteira de ativos a um determinado *benchmark*. Através do modelo de cointegração, procura-se a carteira de ações que possui a mesma

tendência de longo prazo do *benchmark* escolhido, buscando maximizar a estacionariedade e reduzir os erros de aderência entre a carteira e o *benchmark* Alexander (2005).

O modelo de cointegração para seleção de ativos contrasta com o critério da fronteira eficiente de Markovitz, onde os portfólios se baseiam na análise média variância e nada garante que a diferença de desempenho entre a carteira e o *benchmark* se manterá constante. No caso da fronteira eficiente os erros de aderência podem ser passeios aleatórios fazendo com que o portfólio de replicação se afaste do *benchmark*, a não ser que ele seja constantemente rebalanceado (Alexander, 2005), podendo ter altos custos de manutenção. No modelo de cointegração os erros são estacionários e seguem um processo autoregressivo com reversão a média, dessa forma, por mais que em determinados períodos o desempenho do portfólio se afaste do *benchmark*, no longo prazo eles seguem a mesma tendência (Alexander, 2005).

Abaixo temos o modelo teórico de cointegração para uma carteira de três ativos:

$$Y_t = c + \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \beta_3 X_{3,t} + \epsilon_t \quad (3.4)$$

onde Y_t é o logaritmo neperiano do preço do *benchmark*, $X_{1,t}$ é o logaritmo do preço do ativo 1, $X_{2,t}$ é o logaritmo do preço do ativo 2, $X_{3,t}$ é o logaritmo do preço do ativo 3, $X_{4,t}$ é o logaritmo do preço do ativo 4 e ϵ_t é o erro de aderência.

O modelo acima especificado pode ser estimado por Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), onde se as variáveis forem cointegradas, os resíduos serão estacionários. Estimado o modelo por MQO, obtém-se os resíduos estimados os quais são submetidos ao teste de raiz unitária de Dickey-Fuller (Bueno, 2008):

$$\Delta\epsilon_t = \alpha\epsilon_{t-1} + \sum \lambda_{i+1}\Delta\epsilon_{t-i} + \nu_t \quad (3.5)$$

Não rejeitar a hipótese nula no teste de Dickey-Fuller, indica que os resíduos possuem raiz unitária, ou seja, não são estacionários, de forma que as variáveis utilizadas no modelo de MQO não cointegram (Bueno, 2008), sendo assim, a não estacionariedade dos resíduos no portfólio escolhido implicaria em um afastamento no longo prazo dos retornos da carteira em relação aos retornos do *benchmark*. Além do teste de raiz unitária sobre os resíduos, será abordado outro teste de cointegração, o de Johansen.

Compreendido o modelo de cointegração utilizado neste trabalho e sua aplicação

na escolha dos ativos que irão compor a carteira, as subseções seguintes sugerem quatro procedimentos para montagem da carteira de ativos a vista, com análise de risco, retorno e otimização com base na análise de cointegração e por fim a última subseção específica a análise de performance retraotiva e cálculo da taxa ótima de *hedge* para a carteira escolhida.

3.2.1 Procedimento 1 - Seleção de Ativos

A escolha dos ativos que farão parte do portfólio é de extrema importância na avaliação do investimento. Pelo fato de no presente trabalho ser abordado a administração passiva de portfólio, o objetivo deste, será através do modelo de cointegração, escolher a carteira que possui o menor erro de aderência e consequentemente a mesma tendência de longo prazo em relação ao *benchmark* escolhido.

Com o objetivo de limitar as possibilidades de escolha de ativos, utilizou-se somente as ações de empresas que compõem o cálculo do índice bovespa. O índice bovespa é uma carteira teórica de ações que busca se aproximar da real configuração de negociação no mercado real. A cada quadrimestre é feita uma avaliação das ações que compõem o índice nos últimos 12 meses, onde o critério básico é de que os ativos presentes no índice devem ter presença em pelo menos 80% das sessões de pregão (Pinheiro, 2009). A escolha das ações do índice como grupo de possibilidades para composição do portfólio é explicado pela liquidez proporcionada pelos ativos integrantes do Ibovespa. Esta será a única etapa em que é abordado o índice da bolsa de valores de São Paulo para o procedimento de seleção dos ativos.

Para reduzir ainda mais as possibilidades de combinações de ativos para construção da carteira, selecionou-se dentro do índice bovespa ações das cinco empresas que apresentaram na média dos últimos cinco anos o maior retorno sobre o patrimônio líquido (ROE), comparativamente as demais empresas do índice. As cinco empresas que apresentaram em média o maior retorno sobre o patrimônio líquido no últimos cinco anos (2010-2015) são: Cielo SA, Natura Cosméticos SA, Braskem SA, BB Seguridade Participações SA e CCR SA apresentando retornos sobre o patrimônio de 94,31%, 62,68%, 43,47%, 39,01% e 30,38% respectivamente.

O emprego do retorno sobre o patrimônio líquido para seleção dos ativos para

compor a carteira, se deve a sua representação em forma de lucro, do retorno sobre os recursos dos acionistas. Dado que o ROE representa o retorno dos recursos próprios investidos na empresa, este exerce influência também no valor de mercado de médio e longo prazo das ações (Pinheiro, 2009), visto que como são os recursos dos acionistas que são aplicados, quanto maior for o retorno esperado sobre o patrimônio líquido, maior será e demanda pelo ativo, resultando em elevação do preço.

Dos cinco ativos selecionados como candidatos para a composição do portfólio somente três farão parte da carteira. A quantidade de ativos na carteira foi escolhida subjetivamente, e é importante deixar claro que a quantidade de ativos pode variar de acordo com as necessidades de cada investidor sem prejuízos na metodologia econométrica aqui empregada. Para obter todas as possibilidades de composição da carteira de três ativos tendo disponível para seleção cinco alternativas de ações foi utilizado um procedimento de análise combinatória especificado da seguinte forma (Sartoris, 2013):

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.6)$$

onde n é o número de ativos disponíveis para combinação e k corresponde a quantidade de ativos na composição da carteira. Com o total de cinco ativos montando combinações de carteiras compostas de três, são possíveis dez combinações de carteiras diferentes com os ativos citados anteriormente.

Serão feitos testes de cointegração nas dez possibilidades de carteiras em relação ao índice MSCI Brazil, afim de obter o portfólio com menor erro de aderência em relação ao índice. Na seção cointegração, foi comentado a respeito do teste de cointegração de uma forma simples, para melhorar o embasamento teórico dos testes utilizados neste trabalho, será feita uma breve explanação dos testes utilizados.

Na seção anterior foi especificado o modelo teórico de cointegração e suas implicações e aplicações na seleção de carteiras e análise de investimentos. O modelo de cointegração especificado corresponde a metodologia de teste de Engle-Granger, onde este teste pode ser empregado em três etapas (Bueno, 2008):

- 1) Teste de raiz unitária buscando verificar a ordem de integração das variáveis a serem testadas;
- 2) Estimação de um modelo de regressão múltipla entre as variáveis pelo método de

mínimos quadrados ordinários para obter os resíduos estimados no caso ϵ_t na equação 3.4; 3) Testar a estacionariedade dos resíduos através do teste de raiz unitária de Dickey-Fuller aumentado, conforme equação 3.5.

O teste de cointegração de Engle-Granger é de simples implementação na prática pelo modelo de mínimos quadrados ordinários, no entanto, a distribuição de probabilidade do parâmetro autorregressivo no teste de Dickey Fuller não é convencional, sendo necessário uma tabela apropriada para o teste de hipóteses, felizmente disponibilizada pelo *software* econométrico.

Uma desvantagem da metodologia de Engle-Granger neste caso se refere a limitação do teste sobre uma única equação, onde pode haver diferentes configurações das variáveis no modelo. Quando testamos a cointegração por Engle-Granger, determinamos quais são as variáveis independentes e a variável dependente, neste caso somente um vetor de cointegração é estimado onde pode haver mais vetores de cointegração, sendo assim, seria necessário testar todas as possibilidades de modelo, alternando as variáveis explicativas e explicadas, afim de estimar todas as relações de longo prazo. A metodologia de Engle-Granger estimando todas as possibilidades de modelo, pode fornecer muitas relações de longo prazo para modelos de mais de duas variáveis, como não há um embasamento teórico afirmando qual seria a mais correta neste caso, a metodologia de Johansen pode ser utilizada para obter resultados mais conclusivos.

Metodologicamente para solucionar o problema do teste de cointegração sobre uma única equação, temos o teste de cointegração de Johansen que utilizando o modelo de correção de erros (MCE), possibilita estimar várias equações e testar a possibilidade de existência de mais de um vetor de cointegração. Genericamente o modelo de correção de erros a ser utilizado no teste pode ser descrito da seguinte forma (Bueno, 2008):

$$\Delta X_t = \Phi X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda \Delta X_{t-i} + \delta d_t + \varepsilon_t \quad (3.7)$$

No modelo especificado acima, Φ corresponde a matriz de parâmetros autorregressivos de longo prazo e λ é o parâmetro autorregressivo da diferença de X_t que considera os fatores de curto prazo, enquanto δ corresponde ao parâmetro das variáveis determinísticas d_t . Podemos entender Φ como o mecanismo de correção de erros, os parâmetros da matriz Φ estão relacionados a velocidade de ajustamento da séries para uma tendência de longo

prazo (Morettin & Toloi, 2006). Para estimar o modelo de correção de erros especificado acima, Johansen propõe um método mais complexo se comparado ao de Engle-Granger. Observando dois sistemas de equações na forma não estacionária e passando-os para a forma vetorial, normaliza-se os parâmetros reduzindo a matriz para a forma escalonada reduzida por linhas, afim de encontrar o posto da matriz. Para identificar o posto Johansen propõe a estimação pelo método de máxima verossimilhança maximizando a especificação com restrições sobre a matriz de covariância, para obter os autovalores da matriz Φ acima (Bueno, 2008). Estimado os autovalores estes serão submetidos a aplicação de dois testes estatísticos formulados por Johansen com distribuições de probabilidade não convencionais no teste de hipóteses, para verificar a existência de vetores de cointegração.

O primeiro teste é o do traço, onde a hipótese nula é de que existem r^* vetores de cointegração contra a hipótese alternativa de que existem $r > r^*$ vetores. A ideia deste teste é de que, se existe cointegração o posto da matriz Φ será significativamente diferente de zero, caso seja igual ou muito próximo a zero, pode denotar a existência de raiz unitária da matriz Φ .

O outro teste a ser implementado é o de razão de verossimilhança, este teste é mais robusto que o anterior e também possui uma distribuição de probabilidade não convencional. A hipótese nula deste teste nos diz que existem r^* vetores de cointegração, enquanto, a hipótese alternativa testa a existência de mais um vetor de cointegração, sendo assim, a rejeição da hipótese nula pode indicar a existência de um vetor adicional de cointegração (Bueno, 2008).

Especificado os dois testes de cointegração a serem utilizados neste trabalho, será feito um breve comentário a respeito das características de cada teste para o problema de seleção de ativos. Tanto o teste de Engle-Granger como de Johansen fornecem informações importantes sobre o processo de cointegração entre determinadas variáveis, no entanto, o teste de Engle-Granger sofre de um viés quando são utilizadas mais de duas variáveis para o teste de cointegração. Dependendo da especificação de quais variáveis são dependentes e quais são independentes no modelo, a metodologia de Engle-Granger pode apresentar resultados confusos quanto a relação de longo prazo entre as variáveis. Sendo assim, somente uma estimativa é possível mesmo que possa haver mais de um vetor de cointegração no modelo. Ao contrário do teste de Engle-Granger, o método de Johansen pode ser empregado para n variáveis sem problemas de viés de especificação, dessa forma, é importante utilizar

ambos os testes e comparar os resultados para um resultado mais conclusivo ([Alexander, 2005](#)).

3.2.2 Procedimento 2 - Determinação dos Pesos

Tendo os recursos disponíveis na forma monetária e escolhido os ativos da carteira o investidor se depara com a questão: qual a quantidade de dinheiro ele colocará em cada ativo? No caso do presente trabalho, o investidor dividiria o total de sua aplicação inicial em dinheiro na compra de três ativos, mas qual a quantidade dos seus recursos em dinheiro ele deveria direcionar para cada ativo? Esta seção busca responder essa questão utilizando um processo de otimização que vai de encontro com a modelagem de cointegração.

O peso de cada ativo no portfólio ou porcentagem dos recursos direcionada a cada ativo, influenciam de forma direta o risco e o retorno da carteira de investimentos. Existem processos de determinação dos pesos de cada ativo baseados na subjetividade de cada indivíduo, assim como também temos disponível processos de otimização matemática, baseados em alguma restrição imposta. O processo de otimização mais conhecido e talvez mais utilizado, é o de combinar os pesos de cada ativo dentro do portfólio com o objetivo reduzir o risco, em outras palavras, a combinação de carteira que oferece a menor variância.

Esse procedimento pode ser facilmente aplicado quando temos somente dois ativos na carteira. Calculamos a fronteira eficiente do portfólio com todos os pesos possíveis para sua composição, iniciando com 100% de um ativo e 0% de outro e vice versa. A otimização nesse caso consiste em encontrar o ponto na fronteira eficiente que possui a menor inclinação, dito de outro modo, calcula-se a derivada parcial da função risco igualando esta a zero. Para exemplificar o processo, suponha que escolhemos dois ativos para compor o portfólio A e B. O problema agora é saber quanto devemos investir de nossos recursos no ativo A e quanto no ativo B afim de minimizar o risco da carteira. A função risco para os ativos A e B pode ser escrita na forma genérica conforme abaixo ([Elton et.al, 2012](#)):

$$\sigma_p^2 = \omega_A^2 \sigma_A^2 + 2\omega_A(1 - \omega_A)\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B + (1 - \omega_A^2)\sigma_B^2 \quad (3.8)$$

onde σ_p^2 corresponde ao risco do portfólio, ω_A é o peso do ativo A na carteira, $1 - \omega_A$ é o peso do ativo B, $\rho_{A,B}$ é o coeficiente de correlação enquanto σ_A e σ_B são os riscos ou desvio

padrão do ativo A e B respectivamente. A condição de maximização com a restrição de portfólio de menor risco é dada por:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \omega_A} = 0 \quad (3.9)$$

aplicando a derivada parcial de σ_p em relação a X_A , chegamos a equação de determinação dos pesos:

$$\omega_A = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}} \quad (3.10)$$

A equação acima determina o peso do ativo A na carteira, como esta é composta somente por dois ativos, o peso do ativo B é dado por $(1 - X_A)$. Para o caso de um portfólio composto por mais de dois ativos a otimização pode ser feita através da resolução de um sistema de equações lineares.

Otimização por Mínimos Quadrados Ordinários

Outra abordagem de otimização pode fornecer resultados interessantes quanto aos pesos dos ativos na carteira. Esta abordagem está intimamente relacionada ao processo de cointegração e tem como restrição agora a minimização do erro de aderência em relação ao *benchmark*, nesse caso, estima-se um modelo de mínimos quadrados ordinários com a restrição de que a soma dos parâmetros do modelo devem ser igual a um. Para a realização desse processo temos o logaritmo do preço do *benchmark* como variável dependente, e o logaritmo do preço de cada ativo como variável independente, desse modo, o parâmetro estimado de cada ativo corresponde ao seu peso dentro do portfólio, visto que, a soma dos parâmetros obrigatoriamente será igual a um. Para exemplificar esse processo de otimização, partiremos de uma carteira com dois ativos cointegrados com um *benchmark*. Supondo novamente o ativo A e B cointegrados com o *benchmark* Y temos o seguinte modelo de regressão:

$$y = \beta_1 X_A + \beta_2 X_B + \varepsilon \quad (3.11)$$

com a seguinte restrição:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (3.12)$$

onde y é o logaritmo de preço do *benchmark* e X_A e X_B correspondem ao logaritmo de preço do ativo A e B respectivamente. Enquanto, β_1 e β_2 são os pesos dos ativos A e B a serem estimados.

Podemos reescrever a regressão acima para encontrar a seguinte forma (Johnston & DiNardo, 1997):

$$y = \beta_1 X_A + (1 - \beta_1) X_B + \varepsilon \quad y - X_B = \beta_1 (X_A - X_B) + \varepsilon \quad (3.13)$$

escrevendo o modelo em notação matricial e montando o lagrangeano, temos:

$$\delta = (y - X\beta)'(y - X\beta) - 2\lambda'(R\beta - r) \quad (3.14)$$

onde $(y - x\beta)$ corresponde ao resíduo estimado, R e r são vetores de constantes. Assim buscando minimizar o quadrado dos resíduos aplicamos a derivada parcial, da seguinte forma:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \beta} = -2X'Y + 2(X'X)\beta - 2\lambda'R' = 0 \quad \frac{\partial \delta}{\partial \beta} = -2(R\beta - r) = 0 \quad (3.15)$$

Nesse processo de otimização minimizamos os quadrados dos resíduos em busca da combinação de pesos dos ativos de modo que a carteira tenha a relação mais estreita possível com o *benchmark* no longo prazo, dito de outra forma, o menor erro de aderência em relação ao *benchmark* escolhido. Uma limitação deste procedimento de otimização, consiste em que não há restrição para que os pesos sejam iguais ou superiores a zero, dessa forma, podemos ter ativos com peso negativo dentro da carteira, o que significa que devemos operar vendido nesse ativo. Como este trabalho se limita a seleção de um portfólio de ativos comprados a vista, é necessário a implementação de outro método de otimização caso o peso por MQO para pelo menos um ativo seja negativo.

Otimização por Programação Quadrática

Outro método de otimização é a programação quadrática, onde podemos minimizar

ou maximizar uma determinada função respeitadas algumas restrições. Para este trabalho minimizaremos a função risco respeitadas as restrições: soma dos pesos deve ser igual a unidade, os pesos de todos os ativos devem ser iguais ou superiores a zero e os pesos devem respeitar um retorno mínimo desejado pelo investidor na função retorno da carteira. Este problema de otimização pode ser especificado formalmente da seguinte forma para uma carteira com três ativos:

minimizar:

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + \omega_3^2 \sigma_3^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_{12} + 2\omega_1 \omega_3 \sigma_{13} + 2\omega_2 \omega_3 \sigma_{23} \quad (3.16)$$

sujeito à

$$\sum_{i=1}^3 \omega_i = 1 \quad (3.17)$$

$$\sum_{i=1}^3 (\omega_i \overline{R}_i) = \overline{R}_p \quad (3.18)$$

$$\omega_i \geq 0, \quad (3.19)$$

para $i=1,2,3$, onde ω_i corresponde ao peso do ativo i na carteira, σ_i^2 é a variância do ativo i e $\sigma_{i,j}$ é a covariância dos ativos i e j . Por último, σ_p^2 é a variância do portfólio e \overline{R}_i e \overline{R}_p é o retorno esperado do ativo i e o retorno esperado do ativo da carteira respectivamente.

Respeitadas as condições de Kuhn-Tucker, graficamente esse procedimento busca um ponto que minimiza o risco e respeita as restrições. A programação quadrática é um método de otimização atraente, pois permite a inclusão de restrições adicionais de acordo com as necessidades de cada investidor.

Após o processo de seleção dos ativos e de determinação dos pesos, podemos avançar com a estimação do risco e retorno para a carteira. Será visto adiante que a seleção dos pesos dos ativos no portfólio, influencia de forma direta o risco e o retorno esperado, por exemplo, no processo de otimização buscando minimizar o risco é de se esperar que o ativo de maior risco dentre os escolhidos tenha um peso menor em relação aos demais.

3.2.3 Procedimento 3 - Análise de Risco

A medida mais simples de risco pode ser obtida através do cálculo da variância dos retornos de um determinado ativo que junto com a covariância entre os ativos e seus respectivos pesos fornecem o risco do portfólio conforme fórmula especificada na primeira seção deste capítulo. A equação do risco do portfólio se mantém a mesma, no entanto, para o cálculo do risco de cada ativo individualmente e da covariância entre eles, optou-se pelo modelos de heterocedasticidade condicional univariado ARCH e GARCH para o risco individual, e para cálculo da covariância e correlação o modelo multivariado. Introduzidos por [Bollerslev \(2001\)](#) os modelos autorregressivos de heterocedasticidade condicional tem o intuito de modelar o risco na teoria econômica e na teoria do portfólio, permitindo que a volatilidade dos ativos assim como suas covariâncias variem com o tempo [Bueno \(2008\)](#).

O retorno utilizado na metodologia ARCH e GARCH para mensuração da volatilidade do portfólio corresponde ao retorno especificado na seção risco versus retorno (3.1). Antes de especificar o modelo teórico [Morettin & Toloi \(2006\)](#) ressaltam alguns fatos estilizados sobre retornos como: tendências, sazonalidade, pontos influentes, heterocedasticidade condicional e não linearidade. Abaixo o modelo teórico ARCH ([Morettin & Toloi, 2006](#)):

$$r_t = \mu + \sqrt{\sigma_t} \epsilon_t \quad (3.20)$$

supondo $\mu = 0$, temos:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t} \epsilon_t \quad (3.21)$$

onde:

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r r_{t-r}^2 \quad (3.22)$$

nesse caso, σ_t é a volatilidade do ativo, α_0 corresponde ao termo de intercepto e α_1 até α_r correspondem aos parâmetros autorregressivos do quadrado do retorno.

Uma generalização dos modelos ARCH sugerida por [Bollerslev \(2001\)](#), os modelos GARCH (generalized ARCH) podem ser utilizados para descrever a volatilidade com menos parâmetros tornando o modelo mais parcimonioso ([Morettin & Toloi, 2006](#)). A

modelagem GARCH é o mesmo que afirmar que a volatilidade do período presente não depende somente da volatilidade de uma defasagem, mas também de várias defasagens no tempo (Pyndick & Rubinfeld, 2004). A modelagem GARCH pode ser definida da seguinte maneira Morettin & Toloi (2006):

$$r_t = \sqrt{\sigma_t} \epsilon_t \quad (3.23)$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum \beta_j \sigma_{t-j} \quad (3.24)$$

onde:

$$\epsilon_t \sim \text{i.i.d.} N(0, 1) \quad (3.25)$$

assim, α_0 é o termo de intercepto, α_i é o parâmetro autorregressivo do quadrado do retorno e β_j é o parâmetro autorregressivo da volatilidade do retorno. É interessante ressaltar que na modelagem GARCH a volatilidade dos retornos de um ativo não dependem somente do quadrado dos retornos passados como no modelo ARCH, mas também das volatilidades passadas que influenciam a volatilidade presente através do parâmetro β_j . Podemos entender que no modelo GARCH temos volatilidade passada explicando volatilidade futura.

Além da volatilidade do retorno possuir autocorrelação estatisticamente significativa, os próprios retornos podem ser autocorrelacionados com os períodos anteriores, o que pode indicar ineficiência do mercado, já que observações passadas explicam observações futuras, sendo assim, há necessidade de corrigir a autocorrelação através de modelos autorregressivos ou de médias móveis. A equação abaixo mostra o retorno no período t dependendo do retorno período $t - 1$ acrescido da volatilidade (3.23).

$$r_t = \phi r_{t-1} + \sqrt{\sigma_t} \epsilon_t \quad (3.26)$$

onde ϕ é o parâmetro autorregressivo e r_{t-1} é o retorno no período anterior. Dessa forma σ_t da equação acima é entendido como o segundo modelo descrito na equação 3.23.

Quanto aos modelos de volatilidade ARCH e GARCH, se a soma dos parâmetros do modelo forma inferior a unidade temos que a série de volatilidade dos retornos é estacionária, exceto para o caso dos modelos IGARCH (*Integrated GARCH*) onde admite-se que a

volatilidade segue um passeio aleatório não estacionário, com ausência de volatilidade de longo prazo. A volatilidade de longo prazo pode ser compreendida como o risco de longo prazo de um ativo, ou seja, no curto prazo a volatilidade pode oscilar devido a fatores temporários, mas no longo prazo ela tende a uma média de equilíbrio. A variância do estado estacionário de longo prazo para o modelo GARCH(1,1) pode ser descrita por [Alexander \(2005\)](#):

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha - \beta)} \quad (3.27)$$

onde σ^2 é a variância de longo prazo, α_0 termo de intercepto do modelo, α é o parâmetro autorregressivo do quadrado dos retornos e β é o parâmetro autorregressivo da volatilidade (3.23). Portanto, a variância dos retornos modelada por um GARCH(1,1) possui tendência de longo prazo pelo fato de ser estacionária.

Antes de prosseguir com a análise de risco, convém ressaltar que existem várias extensões do modelo GARCH como: EGARCH, PGARCH, GARCH-M e TARCH. Não há espaço neste trabalho para explicitar o modelo teórico de todas, no entanto, o modelo de extensão TARCH poderá ser rapidamente especificado. O modelo TARCH (*Threshold ARCH*) é uma caso específico do modelo ARCH, teoricamente escrito como ([Bueno, 2008](#)):

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum \gamma_k^d (\epsilon_{t-k} \leq 0) | \epsilon_{t-k}^2 | \quad (3.28)$$

onde d é a variável dummy sendo igual a 1 se o erro satisfaz a condição imposta entre parêntesis e 0 caso contrário. O modelo percebe o impacto de notícias ruins no cálculo da volatilidade representado por $\epsilon_{t-k} < 0$, seguido de $\gamma_k > 0$, neste caso positivo ([Bueno, 2008](#)). A vantagem desta extensão dos modelos GARCH, é que a variável *dummy* pode mostrar o impacto de determinados eventos na volatilidade dos retornos.

Value at Risk (VaR)

Visto a necessidade de mensuração do risco do investimento em ativos financeiros, diferentes métodos de mensuração podem ser adotados ou adaptados de forma a refletir da forma mais adequada a incertaza quanto aos retornos dos ativos. O método VaR (Value at Risk) é uma medida de risco de mercado que calcula sob um determinada probabilidade

a perda máxima que pode ocorrer em um período de tempo (um dia, mês, trimestre, ano e etc) considerando condições normais de mercado e um portfólio fixo no tempo. Neste trabalho será empregado o VaR paramétrico baseado no modelo de volatilidade de séries temporais. Como este é o caso de um portfólio linear de ativos a vista o VaR paramétrico pode ser aplicado corretamente, porém, no caso de portfólios de opções, por exemplo, que possuem características não lineares, medidas de VaR baseados em simulações podem produzir resultados mais adequados ([Alexander, 2005](#)). Resumidamente a ideia por trás do VaR é utilizar o risco calculado pelos modelos ARCH e GARCH e estimar um intervalo de confiança para a volatilidade dos retornos, assim, o investidor pode ter uma estimativa de quanto sua riqueza pode oscilar sobre uma determinada probabilidade. Algebricamente o VaR pode ser representado da seguinte forma ([Morettin, 2011](#)):

$$p = P(\Delta P(h) \leq VAR) \quad (3.29)$$

onde p corresponde a probabilidade do retorno não variar mais que o esperado, $\Delta P(h)$ é a variação do preço ou retorno do ativo no período h e VAR é a variação esperada do retorno. A equação acima expressa que a probabilidade da volatilidade do retorno de um ativo ser menor ou igual a uma variação esperada h períodos a frente, é igual p , podendo ser p igual a 95% por exemplo. Para cálculo do VaR pressupomos que a volatilidade dos retornos seguem uma distribuição normal univariada, sendo importante ressaltar que na prática é pouco provável que a volatilidade apresente características de uma distribuição normal, no entanto, esse pressuposto facilita os cálculos e fornece estimativas razoáveis de risco. Partindo desse pressuposto temos:

$$r_t / F_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3.30)$$

nesse caso os retornos condicionados a informação passada seguem uma distribuição normal com média zero e variância σ_t^2 . Desse modo o cálculo do VaR é ([Alexander, 2005](#)):

$$VaR_{p,h} = Z_p \sigma_t - \mu_t \quad (3.31)$$

o VaR é calculado através da multiplicação da volatilidade σ_t do ativo calculada por séries temporais pela normal padronizada Z_p e subtraído da média dos retornos μ_t no período t . O Value at Risk pode ser utilizado para previsão de risco para h períodos a frente. O VaR

para o portfólio é dado por:

$$VaR_p = \sqrt{2 \sum_{i=1}^n VAR_i^2 \omega_i + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} VAR_i VAR_j} \quad (3.32)$$

onde VAR_i^2 é o value at risk ao quadrado para o ativo i , ρ_{ij} é a correlação entre o ativo i e j e ω_i é o peso do ativo i na carteira.

Algumas vantagens do Value At Risk consiste em estimar o risco de um ativo individual ou de uma carteira de ativos em condições normais de mercado, considerando também as correlações entre os ativos. Outra vantagem, é que comparado ao modelo de fatores de risco, onde a estimativa beta só considera o risco sistemático ou não diversificável, o VaR leva em consideração o risco individual da carteira resultado da relação entre os ativos. Uma desvantagem do VaR para estimativa de risco, é que esta metodologia de cálculo da forma especificada acima, não leva em consideração possíveis oscilações anormais no mercado de ativos, ou seja, eventos atípicos podem não ser corretamente estimados pelo método VaR, assim, com uma analogia, podemos dizer que a estimativa VaR protege o portfólio contra a “garoa” mas não contra a “chuva forte” ([Alexander, 2005](#)).

3.2.4 Procedimento 4 - Estimativa de Retorno e Correlação de uma carteira cointegrada

Retorno da Carteira Cointegrada

O retorno esperado para qualquer investimento dificilmente pode ser mensurado adequadamente, sem falar no erro de previsão inerente a qualquer técnica de mensuração, a dificuldade aumenta ainda mais quando se tenta estimar retornos para ativos financeiros.

A análise dos retornos para ativos ou carteiras pode ser feita através da análise de cenários, ou através das séries temporais dos retornos utilizando a média aritmética. No caso da análise de cenários são atribuídas probabilidades para cada retorno e então é feita uma média ponderada dos retornos por suas probabilidades, observe:

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^n (P_j R_i) \quad (3.33)$$

onde $E(R_i)$ retorno esperado do ativo i , P_j probabilidade de ocorrência do evento j e R_i é o retorno do ativo i no evento j . Quanto a mensuração dos retornos por meio da média

aritmética dos retornos passados, entende-se que existe igual probabilidade de ocorrência de cada retorno considerado no cálculo (Bodie et.al, 2010) e pressupõe-se que estes seguem uma distribuição de probabilidade normal. A média aritmética simples para os retornos é especificada da seguinte forma:

$$\overline{R_i} = \frac{\sum_{i=1}^n R_{i,t}}{n} \quad (3.34)$$

onde $\overline{R_i}$ é a média aritmética dos retornos do ativo i e $R_{i,t}$ é o somatório dos retornos do ativo i ao longo do tempo e n a quantidade de períodos. A média aritmética pode parecer um estimador muito simples de retorno, no entanto, o embasamento teórico por trás desse método de estimação de fácil aplicabilidade é bastante forte. O embasamento teórico para a média aritmética está atrelado a propriedade de ergodicidade. Se a propriedade de ergodicidade existe em um processo estocástico, a média temporal converge para a média não condicional, em outras palavras, a média de retorno calculada é um estimador não viesado da verdadeira média dos retornos. Para que haja ergodicidade em uma série de retornos, a série deve ser fracamente estacionária que respeita as seguintes condições:

$$a) E(r_t)^2 < \infty \quad (3.35)$$

$$b) E(r_t) = \mu, \text{ para todo } t \quad (3.36)$$

$$c) E(r_t - \mu)(r_{t-j} - \mu) = \gamma_j \quad (3.37)$$

pelo item a temos que a variância dessa série não é explosiva, pelo item b a média dos retornos amostrais tende a ser igual a verdadeira média de retornos e pelo item c , temos que a covariância dos retornos não depende do tempo, mas da distância temporal entre as observações.

Desse modo, podemos supor com alguma tranquilidade que a série de retornos de ativos é fracamente estacionária e que a autocovariância entre os retornos tende a zero a uma velocidade rápida quando a distância temporal aumenta, assim podemos afirmar que a série de retornos apresenta ergodicidade. Portanto, a média aritmética pode ser utilizada como estimativa de retornos futuros.

Correlação e Risco da Carteira Cointegrada

Observamos até agora a estimativa de risco para cada ativo individualmente através dos modelos de séries temporais ARCH e GARCH. No entanto, a estimativa de risco de uma carteira de ativos exige mais do que somente o risco individual estimado de cada ativo, é necessário proceder com o cálculo das covariâncias e consequentemente das correlações entre os ativos, afim de estimar adequadamente o risco de um portfólio. Na seção anterior, foi visto que a volatilidade ou risco de um ativo depende de variáveis como o quadrado dos retornos, quadrado dos resíduos, volatilidade dos períodos anteriores e também em alguns casos de uma variável *dummy* representando uma quebra estrutural na volatilidade. Através dos modelos de séries temporais podemos estimar a volatilidade dos ativos e fazer previsão da mesma para períodos futuros. Pois bem, o mesmo pode ser feito para a covariância nos modelos GARCH multivariado, onde esta depende de variáveis como o produto de seus erros passados e sua covariância passada. Para formalizar o procedimento adotado neste trabalho, podemos especificar a matriz de covariâncias da seguinte forma (Morettin, 2011):

$$\Gamma(t + \tau, t) = E(X_{t+\tau} - \mu_{t+\tau})(X_t - \mu_t) \quad (3.38)$$

A matriz acima especificada é composta pela autocovariância dos retornos de cada ativo e pela covariância entre os ativos, onde $X_t + \tau$ é o retorno dos ativos no período $t + \tau$ e $\mu_t + \tau$ corresponde a média dos retornos no período $t + \tau$ e quando aberta assume a forma abaixo:

$$\Gamma_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t} & \sigma_{12,t} & \dots & \sigma_{1n,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{22,t} & \dots & \sigma_{2n,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1,t} & \sigma_{n2,t} & \dots & \sigma_{nn,t} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde o $\sigma_{11,t}$ corresponde a autocovariância do ativo 1 no período t sendo $\sigma_{22,t}$ a autocovariância do ativo 2 no período t e assim por diante nos demais sigmas da diagonal principal. Fora da diagonal principal temos as covariâncias entre os ativos, nesse caso por exemplo, $\sigma_{21,t}$ corresponde a covariância do ativo 1 e 2 no período t . Como trata-se de

uma matriz simétrica, os valores do triângulo superior serão iguais aos valores do triângulo inferior (Bueno, 2008).

O problema agora consiste em estimar os parâmetros da matriz Γ_t acima, para que isso possa ser feito Bollerslev, Engle e Wooldridge estenderam o modelo GARCH-M para a forma multivariada utilizando o operador VECCH, o qual consiste em empilhar os elementos do triângulo inferior em um vetor coluna (Bueno, 2008). O modelo VECCH pode ser especificado da seguinte forma (Bueno, 2008):

$$VECH(\Gamma_t) = C + \sum_{i=1}^q A_i VECCH(\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-i}') + \sum_{j=1}^p B_j VECCH(\Gamma_{t-j}) \quad (3.40)$$

Pode-se visualizar pela equação acima, que a matriz de covariâncias Γ_t depende da matriz de produto cruzado dos erros $\epsilon_{t-i} \epsilon_{t-i}'$ de uma constante C e da matriz de covariâncias do período anterior Γ_{t-j} . Os parâmetros A_i , C e B_j são estimados por máxima verossimilhança com restrição de que os autovalores da matriz de covariância devem ser superior a zero (Bueno, 2008) e VECCH é o operador que transforma o triângulo inferior da matriz em um vetor coluna.

A equação acima descrita pode ser visualizada na forma matricial para um MGARCH(1,1), onde a variância e a covariância dos ativos dependem do passado em uma defasagem de um período (Bueno, 2008):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,t} \\ \sigma_{21,t} \\ \sigma_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11,t} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22,t} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t-1}^2 \\ \epsilon_{2,t-1} \epsilon_{1,t-1} \\ \epsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11,t} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22,t} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} \\ \sigma_{22,t-1} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

no caso do exemplo de modelo especificado acima temos dois ativos e buscamos estimar a variância de cada um e a covariância entre eles. No modelo $\sigma_{11,t}$ e $\sigma_{22,t}$ correspondem a variância dos ativos 1 e 2 no período t e $\sigma_{21,t}$ a covariância entre os ativos no período t . Notamos que estes são explicados pelos resíduos do modelo $\epsilon_{1,t-1}^2 \dots \epsilon_{n,t-i}$ e no caso pelas variâncias e covariância dos ativos no períodos anteriores $\sigma_{11,t-1}$, $\sigma_{22,t-1}$ e $\sigma_{21,t-1}$ respectivamente. Os parâmetros $a_{11,t} \dots a_{nn,t}$ e $b_{11,t} \dots b_{nn,t}$ são estimados por máxima verossimilhança com restrição.

Com a modelagem GARCH multivariada podemos estimar o risco individual de cada ativo e também a covariância entre eles para estimativa de risco do portfólio com maior precisão temporal. Uma alternativa a modelagem multivariada seria o cálculo da covariância entre os dados fixa no tempo no formato básico, no entanto, essa medida de covariância pode induzir o cálculo do risco a estimativas pouco confiáveis, já que é pouco provável que a relação de covariância entre os diferentes ativos se mantenham constantes no tempo.

O modelo GARH multivariado e mais especificamente o método VECH, utilizam-se dos erros e das covariâncias passadas para fazer previsão, porém, o modelo multivariado de cálculo de volatilidade não é totalmente preciso, e em caso de fortes variações na volatilidade ou no comportamento das covariâncias (caso em que os resíduos e as variâncias não se alterem vagarosamente), o modelo pode ser incapaz de prever fortes oscilações na volatilidade dos ativos e da carteira.

Portanto, tanto GARCH multivariado como a covariância fixa podem ser utilizadas, mas nesse caso a metodologia multivariada GARCH de séries temporais pode ser mais atraente por calcular medidas de covariâncias variáveis no tempo e estimativas de risco mais precisas temporalmente comparada a covariância fixa.

3.2.5 Procedimento 5 - Análise da Performance Retroativa da Carteira

Esta seção tem por objetivo especificar o método de análise retroativa da carteira, ou seja, verificar o desempenho da carteira quanto ao risco e retorno caso esta tivesse sido adquirido no passado e especificar a metodologia de cálculo da taxa ótima de hedge. O teste é realizado nos 12 meses anteriores a escolha do portfólio até a data presente de análise. Para a estimativa de retorno da carteira, é utilizado os pesos ótimos encontrados no procedimento 2 e os retornos reais desta carteira no período passado, assim como para a estimativa de risco é averiguado quantas vezes a perda real superou a perda estimada pelos modelos de risco. É importante deixar claro que o risco e retorno apresentados na performance retroativa no capítulo 4 pressupõem que o investidor mantém os pesos da carteira sempre ótimos, comprando e vendendo ativos diariamente de forma a evitar que os pesos se alterem para não influenciar nas estimativas de risco e retorno.

A primeira etapa para testar a performance retroativa da carteira é através de um

modelo de regressão simples, regredir os retornos do índice como variável dependente e os retornos da carteira como variável independente, para verificar se os resíduos deste modelo são normalmente distribuídos, caso sejam, o desempenho da carteira e do *benchmark* são parecidos e existe uma realção de longo prazo entre eles. A segunda etapa é estimar a perda esperada máxima da carteira nos últimos 12 meses e verificar quantas vezes a perda realizada foi superior a perda esperada. A perda máxima esperada é estimada com base no *Value At Risk* e toda vez que os retornos são negativos de modo a se verificar uma perda superior a esperada, temos uma exceção, o número de exceções médio é calculado através da média de uma distribuição de probabilidade binomial, assim pode ser feito inferências para períodos futuros a respeito de quantas exceções podem ocorrer com uma determinada probabilidade. Por último é analisado os retornos dos últimos 12 meses da carteira escolhida e é feita a compração com base no retorno acumulado da carteira e do índice de forma a verificar se estes possuem desempenho em comum e qual o retorno obtido caso a carteira tivesse sido adquirida nos últimos 12 meses.

Concluída a análise de performance retroativa da carteira é realizado o cálculo da taxa ótima de *hedge* de forma a proporcionar ao investidor a taxa ótima a ser investida em um instrumento financeiro para redução do risco de portfólio. A taxa ótima de *hedge* é calculada com base na relação entre o índice MSCI Brazil a vista e este mesmo índice negociado no mercado futuro, de forma a encontrar a porcentagem da carteira a ser investida no índice futuro de forma a reduzir a incerteza. Como a carteira escolhida possui a mesma tendência de longo prazo do MSCI Brazil, vender este índice no mercado futuro possibilita uma espécie de seguro, pois caso o retorno da carteira seja negativo o retorno da venda do índice no mercado futuro será positivo compensando a perda da carteira e vice e versa. O próximo capítulo se encarrega da aplicação prática da metodologia especificada.

4. ESTIMATIVAS ECONOMÉTRICAS

4.1 Modelos de Cointegração

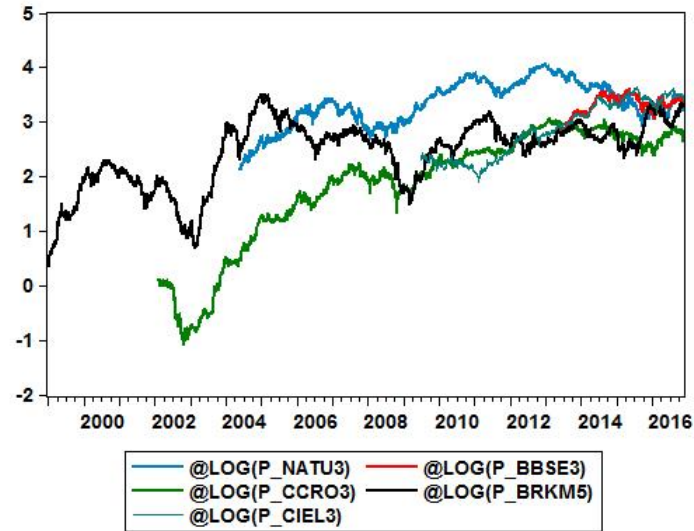
O modelo de cointegração busca através de estimativas econométricas e testes estatísticos adequados, selecionar o portfólio que segue a mesma tendência de longo prazo do *benchmark*. Neste caso foi feito um modelo de regressão múltipla pela estimativa de MQO onde o logaritmo do valor diário do índice MSCI BRAZIL Index é a variável explicada, e o logaritmo dos preços diários das ações candidatas a compor a carteira como variáveis explicativas. Inicialmente testamos a cointegração para todas as possibilidades de carteiras regredindo o *benchmark* contra essas possibilidades através da metodologia de Mínimos Quadrados Ordinários e logo após fazendo o teste de Dickey-Fuller aumentado sobre os resíduos verificando sua estacionariedade. Na tabela abaixo temos as dez possibilidades de carteira a serem montadas:

Tabela 4.1: Possibilidades de Carteiras

Carteira	Ativo 1	Ativo 2	Ativo 3
1	Cielo	Natura	Braskem
2	Cielo	Natura	BB Seguridade
3	Cielo	Natura	CCR Rodovias
4	Cielo	Braskem	BB Seguridade
5	Natura	Braskem	CCR Rodovias
6	Cielo	BB Seguridade	CCR Rodovias
7	Natura	Braskem	BB Seguridade
8	Natura	Braskem	CCR Rodovias
9	Natura	BB Seguridade	CCR Rodovias
10	Braskem	BB Seguridade	CCR Rodovias

Abaixo encontram-se os gráficos do logaritmo de preço de cada ativo que pode compor a carteira. Analisando graficamente, espera-se que quando os ativos são cointegrados, as linhas do logaritmo de preço tenham a mesma tendência. Os gráficos apresentam os preços diários dos ativos iniciando em abril de 2013 até outubro de 2016. A legenda dos gráficos mostra os códigos de negociação dos ativos em bolsa, para facilitar o entendimento CIEL3, NATU3, BRKM5, BBSE3 e CCRO3 correspondem a Cielo SA, Natura Cosméticos SA, Braskem SA, BB Seguridade Participações SA e CCR SA respectivamente.

Figura 4.1: Logaritmo de Preço dos Ativos



A visualização do gráfico dos logaritmos dos preços de cada ativo pode fornecer um primeiro *insight* a respeito das tendências de longo prazo de cada carteira passível de escolha.

Na tabela seguinte temos as estatísticas do modelo de regressão 3.4 para cada carteira.

Tabela 4.2: Análise de Regressão de MQO por Carteira

Carteira	Obs	R2	DW	SQR	F
1	1930	0,8604	0,0293	35,3177	3956,51
2	930	0,8903	0,0741	8,2821	2504,02
3	1930	0,8441	0,0235	39,4460	3475,24
4	930	0,5648	0,0406	32,8444	400,58
5	3258	0,4230	0,0062	361,0911	795,14
6	930	0,9093	0,1312	6,8441	3095,03
7	930	0,9133	0,0869	6,5466	3249,68
8	3258	0,4230	0,0062	361,0911	795,14
9	930	0,9233	0,0877	5,7894	3715,06
10	930	0,8455	0,0797	11,6613	1688,98

Para cada possibilidade de carteira foi feito um modelo de regressão, tendo o índice como variável explicada e a carteira como variável explicativa. Na tabela 4.2 acima temos algumas estatísticas para os modelos estimados. A primeira coluna corresponde ao número de observações da amostra, no caso de 1930 observações, temos dados para o índice e preço das ações desde 29/06/2009 até 18/11/2016, para 930 observações os dados correspondem a 29/04/2013 a 18/11/2016 e para 3258 observações os dados são de

26/05/2014 até 18/11/2016. Existe diferença no número de observações porque os ativos começaram a ser negociados em bolsa em períodos diferentes. Na segunda coluna temos o coeficiente de determinação (R^2), onde podemos entender qual a porcentagem do índice é explicada pela carteira, esta estatística não possui muita relevância na análise a ser feita neste trabalho, no entanto, a carteira 9 é a que possui a maior porcentagem que explica variações do índice. Em um primeiro momento podemos dizer que esta carteira é uma forte candidata a ser a mais cointegrada com o índice.

Na terceira coluna temos a estatística Durbin-Watson (DW), por esta estatística ser muito próxima de zero para todos os modelos estimados detectamos um possível problema de autocorrelação dos resíduos. No entanto, uma das premissas do teste de Durbin-Watson é a de que as variáveis explicativas devem ser fixas ou não estocásticas e que a inclusão de termos autorregressivos no modelo invalidam o teste ([Gujarati, 2006](#)). A correlação serial indicada por DW, pode reduzir o erro padrão das estimativas e aumentar o intervalo de confiança dos parâmetros estimados ([Pyndick & Rubinfeld, 2004](#)), porém, mesmo com a autocorrelação os estimadores são lineares e não tendenciosos, e os resíduos serão estacionários se quando estimados por um modelo autorregressivo como na equação 3.26 e apresentar o parâmetro ϕ inferior a um, ainda que o objetivo nesta seção não é obter bons parâmetros da regressão, mas testar a estacionariedade dos resíduos. Na quarta coluna encontra-se a soma dos quadrados dos resíduos, esta soma pode ser útil na seleção da carteira que mais acompanha o índice, pois quanto menor a soma dos erros, mais indexada a carteira está ao índice. No caso das carteiras avaliadas, observamos que a carteira 9 é a que possui a menor soma dos quadrados dos erros quando comparadas as outras, novamente pode ser um forte indicativo de que a carteira 9 deve ser a escolhida. Na última coluna temos a estatística F de significância global dos parâmetros, neste caso, conjuntamente os parâmetros são significativos em todos os modelos, no entanto, devido ao problema de autocorrelação, o intervalo de confiança desta estatística pode estar distorcido podendo apresentar resultados equivocados.

A próxima tabela mostra o teste de Dickey-Fuller aumentado para os resíduos dos modelos estimados, afim de verificar sua estacionariedade.

Tabela 4.3: Teste de Dickey-Fuller para Resíduos de Regressão

Carteira	Intercepto	Intercepto e Tendência	Nenhum
1	1%	5%	1%
2	1%	1%	1%
3	5%	10%	1%
4	5%	10%	1%
5	10%	N/S	1%
6	1%	1%	1%
7	1%	1%	1%
8	10%	N/S	1%
9	1%	1%	1%
10	1%	1%	1%

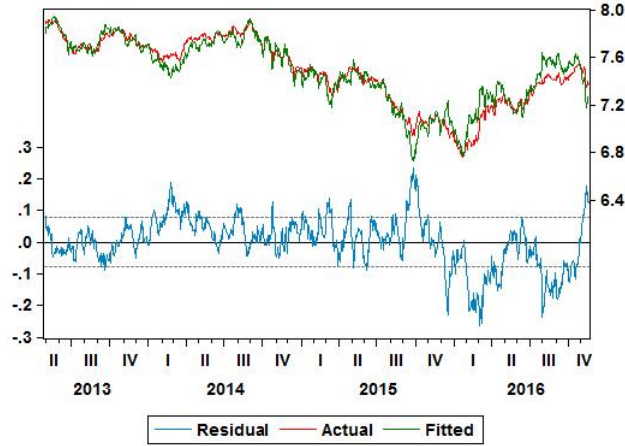
A tabela acima mostra que o teste foi realizado com a inclusão de um intercepto, intercepto e tendência e sem intercepto e sem tendência. Os valores com as porcentagens mostram que a hipótese nula de não estacionariedade dos resíduos foi rejeitada a um determinado nível de significância. O símbolo N/S significa que não se pode rejeitar a hipótese nula de não estacionariedade dos resíduos. Por exemplo, para a carteira 9 os resíduos são estacionários a um nível de significância de 1%, dessa forma, rejeitamos a hipótese nula de não estacionariedade dos resíduos nas três especificações do teste de Dickey-Fuller aumentado (ADF). Para a carteira 8, por exemplo, os resíduos não são estacionários quando fazemos o teste ADF incluindo um termo de intercepto e um termo de tendência, o mesmo acontece para a carteira 5. De uma forma geral, todas as carteiras apresentam resíduos estacionários sendo cointegradas ao índice. Visto que das dez possibilidades de carteira só podemos escolher uma, qual critério podemos utilizar para escolher a carteira com menor erro de aderência já que pelo modelo de regressão todas se mostram cointegradas ao índice? Nesse caso a soma dos quadrados dos resíduos ou o coeficiente de determinação de cada modelo podem servir de parâmetro para a escolha da carteira a ser comprada.

Observando as estatísticas para cada modelo estimado, podemos concluir por enquanto que a carteira 9 é a mais indicada para compra, pois apresenta resíduos estacionários ao nível de 1% de significância no teste Dickey-Fuller em todas as especificações, apresenta a menor soma do quadrado dos resíduos e o maior coeficiente de determinação quando comparada as demais carteiras.

O modelo de cointegração teórico para a carteira 9 é dado pela equação abaixo a qual é versão corrente do modelo de cointegração definido em 3.4:

$$MSCI_t = c + \beta_1 NATU_{1,t} + \beta_2 BBSE_{2,t} + \beta_3 CCRO_{3,t} + \epsilon_t \quad (4.1)$$

Figura 4.2: Modelo de Cointegração para o Índice e Carteira 9



Na figura acima, a linha vermelha representa o logaritmo do índice enquanto a linha verde representa o modelo de regressão múltipla com os ativos da carteira 9. O período que compreende o modelo é de 29 de abril de 2013 a 18 de novembro de 2016, nota-se que em todo o período analisado, o portfólio segue a mesma trajetória do índice escolhido como *benchmark*, os pequenos desvios correspondem ao erro de curto prazo, que são estatisticamente estacionários conforme analisado pelo teste ADF, podendo ser descrito por um modelo autorregressivo ou de médias móveis (Bueno, 2008). A linha azul no gráfico representa os erros ou os resíduos de curto prazo citados anteriormente.

A escolha da carteira 9 pelo teste de estacionariedade de Engle-Granger foi uma seleção inicial com base em somente um teste de coitegração, no entanto, conforme descrito na seção 3.2.1 a metodologia de Engle-Granger apresenta a limitação de estimar somente um único vetor de cointegração, sendo que podem haver mais, sem falar que podemos ter várias especificações de modelo para a mesma carteira. O teste de Johansen busca a combinação linear mais estacionária ao contrário do teste de Engle-Granger que busca a combinação linear de menor variância, sendo também que o teste de Johansen apresenta menor viés, quando o número de variáveis a ser verificada a cointegração, é maior que dois (Alexander, 2005). Com base nisso, será implementado também o teste de cointegração de Johansen para todas as carteiras em relação ao índice, e espera-se que o teste de Johansen seja mais conclusivo com relação a escolha da carteira, já que metodologicamente é mais

complexo e também mais robusto quando comparado ao de Engle-Granger.

A tabela abaixo mostra a quantidade de vetores de cointegração que foram significativos para cada carteira utilizando o teste traço e o teste de razão de máxima verossimilhança.

Tabela 4.4: Teste de Johansen

Carteira	Teste	No Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept Trend	Intercept Trend
1	Traço	0	0	0	0	0
	RMV	0	0	0	0	0
2	Traço	2	1	1	0	0
	RMV	1	0	0	0	0
3	Traço	1	1	1	1	1
	RMV	1	1	1	1	1
4	Traço	0	0	0	0	0
	RMV	0	0	0	0	0
5	Traço	0	0	0	0	0
	RMV	0	0	0	0	0
6	Traço	2	1	1	0	0
	RMV	0	1	1	1	1
7	Traço	1	0	0	0	0
	RMV	1	0	0	0	0
8	Traço	0	0	0	0	0
	RMV	0	0	0	0	0
9	Traço	3	2	2	1	1
	RMV	3	0	0	0	0
10	Traço	0	0	0	0	0
	RMV	0	0	0	1	1

Pelo teste de Johansen estima-se os vetores de cointegração encontrando os autovalores da matriz Φ na equação (3.7), onde será aplicado o teste traço e de razão de máxima verossimilhança (RMV) para verificar se os vetores associados a estes autovalores são significativos (Bueno, 2008). Para cada teste de cointegração de Johansen existem cinco especificações diferentes da equação (3.7), sendo a primeira sem tendência e sem intercepto, com intercepto no vetor de cointegração e sem tendência, com intercepto no nível e com tendência linear no vetor de cointegração, com intercepto no vetor de

cointegração e tendência linear no vetor de cointegração e no nível e por último intercepto e tendência linear no vetor de cointegração e tendência quadrática no nível (tabela 4.4). A tabela acima soma os vetores de cointegração contidos em cada especificação encontrados pelo teste traço e de razão de máxima verossimilhança.

Um método para selecionar a carteira que está mais “indexada” ao *benchmark* pode ser o número de vetores de cointegração significativos de cada carteira em relação ao índice, ou podemos escolher com base na carteira que possui a maior quantidade de vetores de cointegração para uma determinada especificação, por exemplo, a carteira que possui mais vetores de cointegração na especificação sem intercepto e sem tendência. Neste trabalho vamos selecionar a carteira com base no número total de vetores de cointegração independente da especificação.

Pela tabela de teste de cointegração de Johansen observamos que a carteira 9 é a que possui mais vetores de cointegração, essa carteira possui 9 vetores de cointegração significativos pela estatística traço e 3 vetores significativos pelo teste de razão de máxima verossimilhança. No total esta carteira tem mais vetores de cointegração significativos quando comparada as demais carteiras, este é um forte indicativo de que a carteira 9 deve ser a escolhida, já que esta carteira também foi indicada pelo teste de Engle-Granger.

Na tabela abaixo encontra-se a síntese do teste de cointegração de Johansen para a carteira 9:

Tabela 4.5: Teste de Johansen - Número de Vetores de Cointegração Carteira 9

Data Trend	None	None	Linear	Linear	Quadratic
Test Type	No Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept No Trend	Intercept Trend	Intercept Trend
Trace	3	2	2	1	1
Max - Eig	3	0	0	0	0

Na tabela que resume o teste de Johansen para a carteira 9, podemos notar que existe pelo menos um vetor de cointegração para cada especificação de modelo no teste traço, este é um ponto positivo na análise, pois como não sabemos qual é o verdadeiro comportamento dos dados, pelo menos um vetor de cointegração reforça que a carteira tem uma grande chance de ser a mais cointegrada. O número total de vetores de cointegração também é importante, pois quanto mais vetores maior será a chance de que a carteira escolhida acompanhe o índice no longo prazo. A carteira 9 conforme tabela acima, apresenta no total doze vetores de cointegração, tanto a estatística traço, como a estatística de razão

de máxima verossimilhança, apontaram que existe pelos menos três vetores de cointegração significativos ao nível de 5% na especificação sem tendência e sem intercepto, este é um forte indicativo de que a carteira 9 pode ser a mais cointegrada no presente momento, visto que os demais portfólios testados apresentaram um número menor de vetores de cointegração de modo geral e para a especificação sem intercepto e sem tendência.

Concluindo esta seção, a carteira escolhida será a carteira 9, pois esta apresenta resíduos estacionários no teste de Engle-Granger, possui a menor soma dos quadrados dos resíduos na estimativa de Mínimos Quadrados Ordinários no mesmo teste e apresenta o maior número de vetores de cointegração no teste de Johansen, adicionando ainda que possui pelo menos um vetor de cointegração em todas as especificações ao contrário da maioria das demais carteiras. É fato que existem outros critérios de escolha para a metodologia adotada neste trabalho, além de outros métodos que podem apresentar resultados mais eficientes, no entanto, a subjetividade foi deixada de lado e o critério de seleção foi a análise “fria” dos dados. Seleccionada a carteira a qual será comprada, o próximo passo é saber qual o peso de cada ativo dentro do portfólio, em outras palavras, qual a porcentagem de ações da Natura, BB Seguridade e CCR Rodovias devem compor a carteira, este será o assunto da próxima seção.

4.2 Peso Ótimo

Existem diversos critérios para definir qual a quantidade que deve ser investida em cada ativo que irá compor o portfólio, alguns subjetivos e outros analíticos. Para selecionar uma carteira a qual sua composição maximize seu retorno ou minimize seu risco submetidas a determinadas restrições utiliza-se um procedimento de otimização que corresponde a encontrar um ponto em um gráfico tridimensional (no caso do presente trabalho) que maximize ou minimize alguma função respeitando algumas restrições. Neste trabalho utilizou-se dois procedimentos de otimização: o primeiro baseado no método de mínimos quadrados ordinários, onde buscamos minimizar o erro de aderência da carteira em relação ao índice dada a restrição de que a soma dos parâmetros do modelo deve ser igual a um, e a segunda, busca minimizar a função risco dada a restrição de que a soma dos pesos dos ativos deve ser igual a um, cada peso deve ser superior ou igual a zero e estes pesos devem respeitar um retorno mínimo desejado pelo investidor.

Otimização por Mínimos Quadrados Ordinários com restrição

Pelo processo de Otimização por Mínimos Quadrados Ordinários regredimos o logaritmo do índice MSCI Brazil como variável dependente e o logaritmo dos preços dos ativos da carteira 9 (Natura, BB Seguridade e CCR Rodovias) como variável independente, teoricamente o seguinte modelo:

$$MSCI_t = c + \beta_1 NATU_{1,t} + \beta_2 BBSE_{2,t} + \beta_3 CCRO_{3,t} + \epsilon_t \quad (4.2)$$

com a restrição de que a soma dos parâmetros β_1 , β_2 e β_3 deve ser igual a um. Para este processo de otimização temos os seguintes resultados sintetizados na tabela abaixo:

Tabela 4.6: Resultados Modelo de Regressão com Restrição

MSCI BR	Coefficientes	D.P	t-student	p-valor
BBSE3	-0,0193	0,0242	-0,80	0,426
CCRO3	0,2638	0,0550	4,79	0,000
NATU3	0,7555	0,0345	21,77	0,000
constante	4,1763	0,0349	119,74	0,000

De acordo com a tabela acima 75,55% dos recursos devem ser investidos em ações da Natura, 26,38% em ações da CCR Rodovias e -1,93% em ações da BB Seguridade. Este resultado é contrário ao esperado, pois umas das pressuposições deste trabalho é que todos os ativos que farão parte do portfólio devem ser comprados á vista, neste caso, de acordo com o processo de otimização por MQO teríamos que vender a descoberto ações da BB Seguridade em aproximadamente 1,93% do total dos recursos a serem investidos para que o erro de aderência em relação ao MSCI Brazil seja minimizado, dito de outra forma, para que o retorno da carteira acompanhe da maneira mais precisa possível o retorno do MSCI Brazil no longo prazo. Observando a segunda coluna da tabela temos que o desvio padrão do coeficiente BBSE3 (BB Seguridade) é superior ao próprio coeficiente, e que a estatística t-student não é significativa nem em 10%, isso pode ser melhor observado na última coluna, onde o p-valor mostra que existe uma probabilidade de 42,6% de que o coeficiente BBSE3 não seja estatisticamente diferente de zero. Os demais coeficientes conforme a tabela são todos estatisticamente significativos ao nível de 1% de significância, inclusive o termo constante. Dado que o coeficiente para BBSE3 é negativo e insignificante, não podemos chegar a resultados conclusivos sobre qual a porcentagem dos recursos a serem investidos

em cada ativo, portanto, esse processo de otimização não pode ser utilizado na definição dos pesos ótimos da carteira 9.

Buscando resolver o problema dos pesos ótimos da carteira 9, utilizamos outro processo de otimização, que desta vez não tem como objetivo encontrar as porcentagem dos ativos dentro da carteira que minimizem o erro de aderência, mas de reduzir o risco da carteira com restrições nos pesos e no retorno da carteira.

Otimização por Programação Quadrática

A programação quadrática conforme especificado anteriormente busca a combinação ótima de ativos dentro da carteira que minimiza o risco sob a condição de que esta deve oferecer um retorno mínimo desejado pelo investidor e que os pesos de cada ativo dentro da carteira devem ser positivos ou iguais a zero. Para calcular os pesos ótimos de cada ativo no portfólio, são necessárias estatísticas de risco de cada ativo, covariância e retorno esperado para cada ativo. A otimização do portfólio será feita com base na previsão de risco de longo prazo, covariância entre os ativos no dia 18/11/2016 e retorno médio diário dos ativos desde o início de sua negociação na bolsa de valores. Utilizamos a covariância entre os ativos do dia 18/11/2016 para simular a situação em que o investidor compra a carteira 9 nesta data, com os pesos determinados nesta seção. A equação de risco de longo prazo corresponde a equação (3.27). A tabela abaixo resume o risco de longo prazo e o Value at Risk (VaR) de longo prazo para os três ativos da carteira 9:

Tabela 4.7: Volatilidade de Longo prazo

Ativos	Risco Longo Prazo	Value at Risk
BBSE3	2,264%	3,736%
NATU3	2,374%	3,917%
CCRO3	2,965%	4,892%

Na tabela acima, a volatilidade de longo prazo para as ações da BB Seguridade, significa que no longo prazo o preço tem tendência de oscilar 2,26% ao dia positivamente ou negativamente. No caso do Value at Risk, tem-se que existe uma probabilidade de 95% de que o preço da BB Seguridade não oscile mais do que 3,73%. Podemos entender essa medida de risco como a perda máxima que se pode obter com esse ativo em um dia, com uma chance de 95%. Para o cálculo do VaR pressupomos que os retornos seguem uma distribuição normal para dimensionar o intervalo de confiança. Para os ativos da

carteira 9, o que possui maior risco é a CCR Rodrovias com VaR de 4,89% e o que possui menor risco é a BB Seguridade com VaR de 3,73%. A correlação entre os ativos no dia 18/11/2016 pode ser visualizada na tabela abaixo:

Tabela 4.8: Análise de Correlação Carteira 9

Correlação	BBSE3	NATU3	CCRO3
BBSE3	1,0	0,4497	0,5556
NATU3	0,4497	1,0	0,4205
CCRO3	0,5556	0,4205	1,0

Notamos pela tabela acima que a correlação entre os ativos é de aproximadamente 0,5, para o dia 18/11/2016. É importante ressaltar que a correlação pode mudar de um dia para o outro, no entanto, para facilitar o cálculo de otimização do portfólio será utilizada a correlação nesse dia. Outra opção seria utilizar o coeficiente de correlação fixo no tempo para cálculo do risco e otimização da carteira, porém, a correlação fixa pode não fornecer estimativas confiáveis de risco diárias do portfólio, já que este está sujeito a eventuais oscilações intensas diariamente que podem demandar a atenção do investidor.

Uma questão a ser colocada, seria os altos custos de manutenção de um portfólio baseado em correlações diárias, pois mudando as correlações, consequentemente o peso ótimo também irá mudar. Sendo por isso, é importante lembrar que esta é uma carteira cointegrada que busca refletir o desempenho do índice MSCI Brazil no longo prazo, portanto, a otimização irá fornecer pesos ótimos diariamente que podem ser ajustados conforme mudanças na correlação, em intervalos de tempo pré-determinados ou mantidos fixos, de acordo com as necessidades do investidor, além de ser uma importante ferramenta para que o investidor determine de forma analítica e não subjetiva a quantidade de recursos a ser direcionada a cada ativo na etapa inicial do investimento.

Por fim, na tabela abaixo temos os retornos esperados diários para cada ativo. O retorno esperado como especificado anteriormente, é uma média aritmética dos retornos diários, que pode ser considerado um estimador não viesado do verdadeiro retorno.

Tabela 4.9: Retorno esperado

Ativo	BBSE3	NATU3	CCRO3
\bar{R} diário	0,001287	0,000955	0,00136
\bar{R} mensal	0,028699	0,021222	0,0303511

Pela tabela acima, o retorno esperado para as ações da BB Seguridade é de aproximadamente 0,1287% ao dia, para as ações da Natura é de 0,0955% ao dia e para as

ações da CCR Rodovias é de 0,136% ao dia. O retorno mensal esperado considerando um mês com 22 dias úteis é de 2,86% para as ações da BB Seguridade, 2,12% e 3,03% para as ações da Natura e CCR Rodovias respectivamente. A função retorno do portfólio é uma das restrições ao processo de programação quadrática, e pode ser escrita como abaixo:

$$\overline{R_p} = \omega_1 \overline{R_1} + \omega_2 \overline{R_2} + \omega_3 \overline{R_3} \quad (4.3)$$

onde $\overline{R_1}$ corresponde ao retorno esperado da BBSE3, $\overline{R_2}$ o retorno esperado da NATU3 e $\overline{R_3}$ o retorno esperado da CCRO3. Assim temos que a soma dos retornos dados os ω_i para $i = 1, 2, 3$ devem satisfazer o retorno mínimo esperado da carteira $\overline{R_p}$. Estipulou-se que o retorno mínimo esperado pelo investidor neste trabalho é de 20% ao ano, um retorno consideravelmente maior que os retornos dos ativos sem risco que remunera a incerteza da renda variável. Trazendo a taxa de retorno de 20% ao ano para uma taxa equivalente diária temos o valor de 0,0499%, assim, no processo de otimização por programação quadrática, restringiu-se a escolha dos pesos de cada ativo de forma que o portfólio remunere o investidor em pelo menos 0,0499% ao dia.

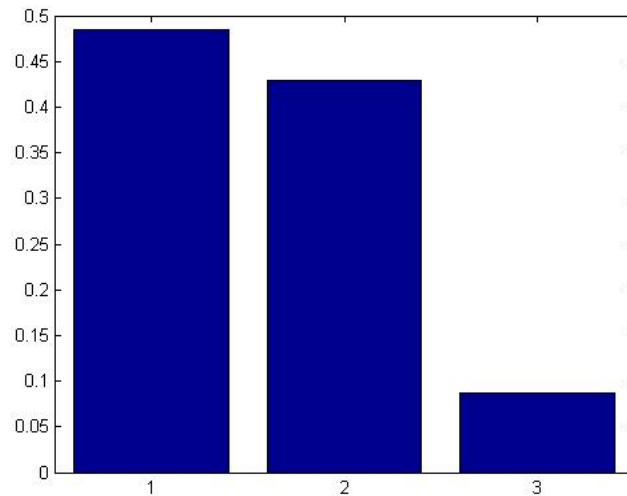
Explicitados todos os parâmetros utilizados na otimização, a tabela abaixo mostra os pesos de cada ativo na carteira 9:

Tabela 4.10: Pesos Ótimos - Ativos da Carteira 9

Ativo	BBSE3	NATU3	CCRO3
ω_i	48,39%	42,85%	8,76%

Em resumo as porcentagens apresentadas na tabela acima são as quantidades investidas em cada ativo que minimizam o risco e proporcionam um retorno de pelo menos 20% ao ano. O gráfico abaixo ilustra a tabela de pesos ótimos, onde 1, 2 e 3 são as barras que corresponde aos pesos ótimos das ações da BBSE3, NATU3 e CCRO3 respectivamente.

Figura 4.3: Pesos Ótimos



Após calculados os pesos ótimos e utilizando a equação 3.18, temos que o retorno esperado para a carteira é de 0,1150% ao dia ou 52,12% ao ano.

Neste seção foram apresentados dois processo de otimização e suas aplicabilidades. O processo de otimização por MQO pode ser utilizado em diversas situações, como os resultados apresentados por esse método foram contrários aos pressupostos deste trabalho, sua aplicação neste caso não foi cabível. Quanto ao método de programação quadrática, este apresentou resultados satisfatórios que vão de encontro as necessidades do investidor em reduzir a incerteza e determinar ganhos mínimos para o investimento. Mais uma vez devido as mudanças nas correlações diárias entre os ativos, provavelmete a carteira que é ótima no dia 18/11/2016 não será nos demais dias, no entanto, como dito anteriormente, os ajustes podem ser feitos em intervalos de tempo de acordo com as necessidades do investidor, a otimização oferece um equilíbrio aproximado entre risco e retorno podendo satisfazer as restrições impostas pelo investidor, portanto, é um parâmetro importante na tomada de decisão.

4.3 Modelos de Risco

Esta seção se encarrega da análise do desvio padrão do retorno e correlação entre os ativos da carteira 9 ao longo do tempo. O desvio padrão foi modelado pelos modelos de heterocedasticidade condicional ARCH e GARCH de séries temporais (Procedimento 3 -

Análise de Risco). O cálculo do risco individual para cada ativo deve ser feito antes do cálculo do peso ótimo, mas como nesta seção será calculado o risco para o portfólio 9, por esse motivo foram calculados antes os pesos. As medidas de risco individuais para cada ativo utilizadas na otimização, são as mesmas calculadas nesta seção. Abaixo os gráficos com a volatilidade diária para cada um dos ativos do portfólio no período de janeiro de 2014 a novembro de 2016.

Figura 4.4: Volatilidade BBSE3



Figura 4.5: Volatilidade NATU3

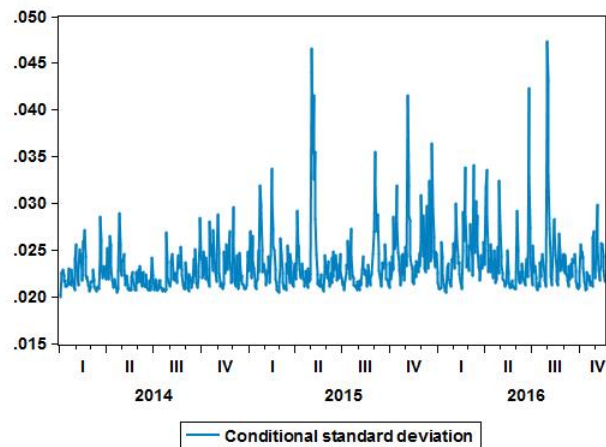
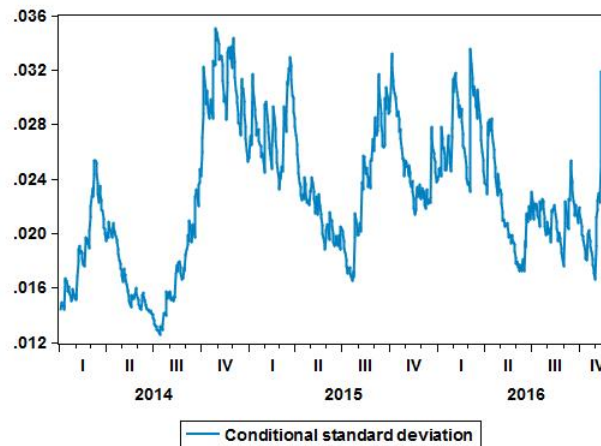


Figura 4.6: Volatilidade CCRO3



Observa-se no gráfico da BB Seguridade que há um pico de volatilidade no primeiro trimestre de 2016 em torno de 4,5%, como a volatilidade é calculada diariamente, isso significa que houve uma incerteza em torno de 4,5% quanto ao retorno daquele dia. Nos demais gráficos, a volatilidade dos retornos pode ser entendida da mesma forma, como medida de incerteza quanto aos retornos no dia. Mas nota-se que alguns ativos possuem maior risco comparativamente aos demais ativos do portfólio, por exemplo, as ações da Natura e da CCR Rodovias possuem estimativa de volatilidade muito próxima aos 3% no caso da Natura, e oscilando de forma acentuada entre 1,5% e 3,0% no caso da CCR Rodovias. Analisando os gráficos e as volatilidades de longo prazo na tabela 4.7, podemos afirmar que para o período compreendido de 01/01/2014 a 18/11/2016, o ativo que possui menor risco na carteira 9 é a BBSE3 com volatilidade de longo prazo de 2,264% e VaR de 3,736%, enquanto o ativo com maior volatilidade comparado aos demais no portfólio é a CCRO3 com risco igual a 2,965% e VaR de 4,892%, enquanto as ações da NATU3 encontram-se no meio termo com volatilidade de 2,374% e VaR de 3,917%. Nas figuras acima é comum observar picos de volatilidade em todos os ativos, sendo estes picos reflexo da grande incerteza no mercado financeiro, causada por algum evento que resultou em nervosismo no mercado. Por exemplo, no início de 2016 temos um aumento na volatilidade dos retornos coincidentemente com o processo de impeachment, as ações da BB Seguridade comparada aos demais ativos apresentou um pico de volatilidade neste período. No entanto, as ações da Natura e a CCR Rodovias, não apresentaram grandes mudanças em sua volatilidade no mesmo período conforme figura acima.

As tabelas abaixo sintetizam as estatísticas da modelagem GARCH para o três

ativos individualmente:

Tabela 4.11: Modelo ARCH-GARCH - Ativo BBSE3

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	7.27E-06	3.83E-06	1.897377	0.0578
RESID(-1) ²	0.061732	0.014735	4.189446	0.0000
GARCH(-1)	0.924090	0.018576	49.74680	0.0000
R-squared	-0.001993	Mean dependent var		0.000986
Adjusted R-squared	-0.000663	S.D. dependent var		0.022098
S.E. of regression	0.022105	Akaike info criterion		-4.901584
Sum squared resid	0.367947	Schwarz criterion		-4.883162
Log likelihood	1848.447	Hannan-Quinn criter.		-4.894487
Durbin-Watson stat	1.919452			

Observando as estatísticas para o modelo da BB Seguridade, temos que os coeficientes ARCH e GARCH são significativos ao nível de 1% na estatística z da distribuição normal, o termo de intercepto é significativo ao nível de 10%. O modelo mostrou-se bem ajustado, com a estatística de Durbin-Watson próxima a dois e com a estatística Q de Ljung-Box e ARCH LM (Anexo) rejeitando a hipótese alternativa, confirmando que não há correlação residual estatisticamente significativa entre o quadrado dos resíduos do modelo, sendo assim, podemos entender que o modelo GARCH(1,1) ajustou-se bem aos dados. Os critérios de informação de Akaike, Schwarz e Hannan-Quinn apresentam valores razoavelmente baixos, mostrando que a especificação do modelo como GARCH(1,1) pode ser melhor que um GARCH(2,1), por exemplo, que poderia apresentar critérios de informação mais elevados. Os resíduos do modelo apresentaram distribuição normal com assimetria igual a 0,0378 e curtose sendo 3,1728, o valor calculado da estatística Jarque-Bera é de 1,1174 e o valor p desta estatística é de 0,5719 (Anexo), portanto, há uma probabilidade de 57,19% de que os resíduos deste modelo sejam normalmente distribuídos, sendo assim, não podemos rejeitar a hipótese nula de normalidade. Na tabela abaixo o modelo de volatilidade para as ações da Natura:

O modelo de volatilidade para os retornos da NATU3, também ajustou-se bem aos dados, um modelo simples e parcimonioso que apresentou estatística de Durbin-Watson próxima a dois e todos os coeficientes significativos a 1%. A série de retornos da Natura apresentava autocorrelação que foi corrigida com um termo autorregressivo AR(1), e a utilização do logaritmo dos retornos da série na estimação do modelo ao invés dos retornos brutos contribuiu com a redução do critério de informação de Schwarz de -4,63 para -4,61 além de um aumento na estatística de Durbin-Watson de 1,95 para 1,96. Os resíduos

Tabela 4.12: Modelo ARCH-GARCH - Ativo NATU3

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.128116	0.039913	3.209910	0.0013
Variance Equation				
C	0,000226	7.46E-05	3.023150	0.0025
RESID(-1) ²	0.142111	0.046857	3.032856	0.0024
GARCH(-1)	0.456891	0.155113	2.945542	0.0032
R-squared	0.021118	Mean dependent var		-0.000160
Adjusted R-squared	0.021118	S.D. dependent var		0.024032
S.E. of regression	0.023777	Akaike info criterion		-4.669934
Sum squared resid	0.425128	Schwarz criterion		-4.645370
Log likelihood	1762.230	Hannan-Quinn criter.		-4.660471
Durbin-Watson stat	1.964444			
Inverted AR Roots	0.13			

não apresentam correlação significativa na estatística Q de Ljung-Box e nem no teste ARCH LM (Anexo). Os resíduos do modelo apresentaram assimetria igual a 0,4421 e curtose de 4,9050, a estatística Jarque-Bera é de 92,67 e assim não podemos rejeitar a hipótese alternativa de não normalidade dos resíduos. A não normalidade dos resíduos pode ser explicada pelas caudas excessivamente alongadas da distribuição normal, em outras palavras, existem muitos retornos incomuns para as ações da Natura no período analisado de 2014 a novembro de 2016. Na tabela 4.13 abaixo o modelo para a CCR Rodovias:

Tabela 4.13: Modelo ARCH-GARCH - Ativo CCRO3

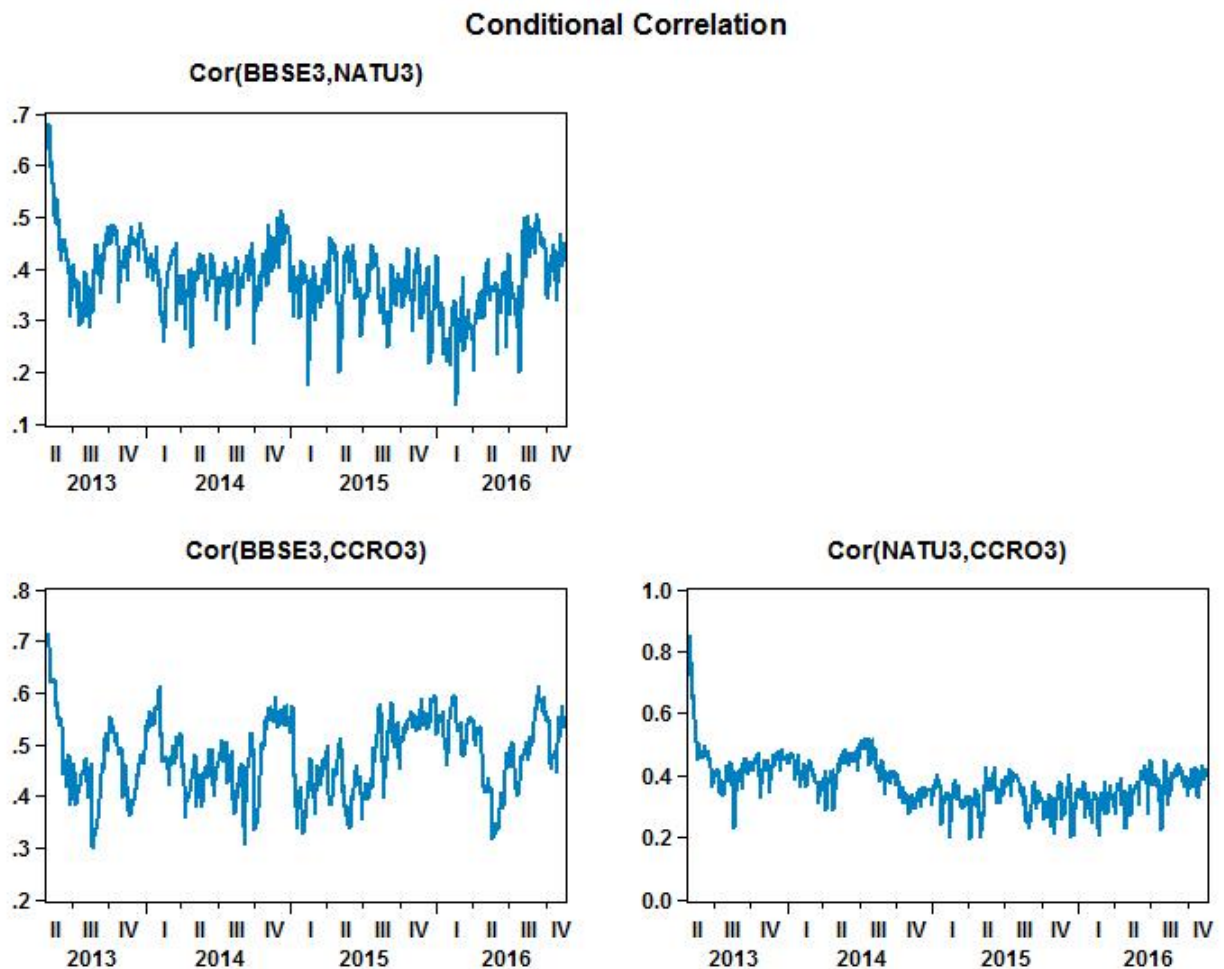
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation				
C	5.91E-06	3.97E-06	1.489118	0.1365
RESID(-1) ²	0.067375	0.016408	4.106315	0.0000
GARCH(-1)	0.925904	0.015898	58.23846	0.0000
R-squared	-0.000395	Mean dependent var		0.000470
Adjusted R-squared	0.000933	S.D. dependent var		0.023662
S.E. of regression	0.023651	Akaike info criterion		-4.724695
Sum squared resid	0.421209	Schwarz criterion		-4.706272
Log likelihood	1781.848	Hannan-Quinn criter.		-4.717598
Durbin-Watson stat	1.913508			

O modelo ajustado para CCRO3 apresentou coeficientes significativos ao nível de 1%, exceto o termo de intercepto que não pode ser considerado estatisticamente diferente de zero. Em resumo as estatísticas para esse modelo mostraram-se adequadas e a autocorrelação dos resíduos foi corrigida podendo ser conferida pelos teste de Durbin-Watson próximo a dois e pelo teste Q de Ljung-Box e ARCH LM em anexo. Os critérios de informação deste modelo apresentaram valores baixos comparados a outros possíveis modelos e os resíduos são normalmente distribuídos com assimetria de -0,1123 e curtose

de 3,2727. Pelo teste de Jarque-Bera (Anexo) igual a 3,9192 com p valor de 0,1409, não podemos rejeitar a hipótese nula de normalidade dos resíduos.

Para o cálculo do risco da carteira são necessárias também as estimativas de correlações entre os ativos. Assim como para a estimativa de risco, temos as correlações diárias entre os retornos dos ativos para o período de 30/04/2013 a 18/11/2016 conforme figura abaixo:

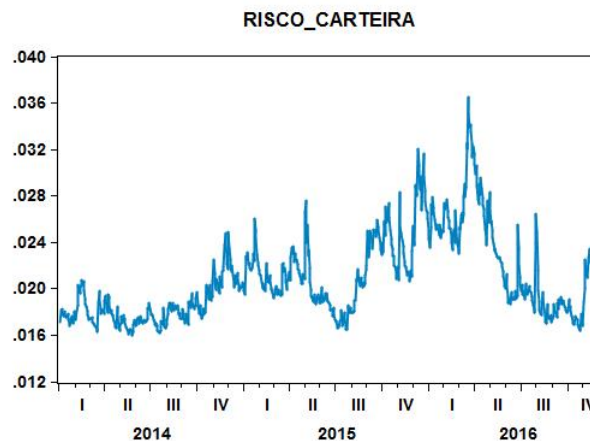
Figura 4.7: Correlação entre os Ativos da Carteira 9



Observando a correlação estimada dos retornos entre a BBSE3 e NATU3, temos que esta chegou a ser 0,5 em alguns dos picos mais altos a aproximadamente 0,15 em alguns picos mais baixos. A correlação entre os retornos das ações da BBSE3 e da CCRO3, apresentam picos entre 0,3 e 0,6 em suas correlações diárias. É bastante claro a estabilidade das correlações entre a NATU3 e CCRO3 quando comparada as demais correlações, esta correlação aparentemente permanece na maior parte das vezes entre 0,3 e 0,4.

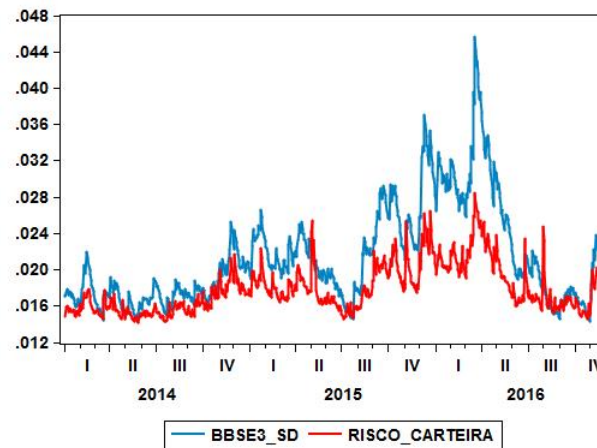
Estimado o risco individual de cada ativo, as correlações e os pesos ótimos, podemos agora calcular o risco da carteira 9 para o período de janeiro de 2014 a 18 de novembro de 2016. É importante deixar claro que para o cálculo dos pesos ótimos foi utilizada a volatilidade de longo prazo estimada para cada ativo, assim como também foi utilizado a correlação entre os ativos no dia 18/11/2016. A estimativa do risco da carteira 9 no período especificado será feita com base no risco diário de cada ativo e nas correlações diárias entre os ativos. As estimativa de risco utilizada para a BB Seguridade, Natura e CCR Rodovias pode ser vizualizada nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 respectivamente, assim como as estimativas de correlação utilizadas podem ser vizualizadas na figura 4.6. Inserindo as estimativas de risco, correlação e os pesos ótimos na equação (3.16), temos a estimativa de risco da carteira 9 na figura abaixo:

Figura 4.8: Estimativa de Risco Carteira 9



Analisando o gráfico acima fica claro que pelas estimativas a carteira 9 possui um pico de volatilidade entre o primeiro e o segundo trimestre de 2016, o que pode significar que a carteira 9 esta bastante sujeita as incertezas neste período, que podem ser uma possível consequência do processo de impeachment no Brasil. Neste período a volatilidade chegou ao patamar de 0,036 o que significa uma volatilidade de 3,6% ao dia dos retornos da carteira 9. Para fins de comparação podemos observar na figura abaixo, como o risco da carteira 9 se comporta em relação ao risco da BBSE3.

Figura 4.9: Estimativa de Risco Carteira 9 e BBSE3



Devido a composição da carteira sendo 48,39% ações da BB Seguridade, 42,85% da Natura e 8,76% da CCR Rodovias, temos que o portfólio possui um comportamento de risco bastante semelhante ao das ações da BBSE3, este comportamento não surpreende já que quase 50% da carteira 9 é composta por ações da BBSE3. É interessante observar que como esperado, na maioria dos períodos a volatilidade da carteira 9 é inferior ao das ações da BBSE3, o efeito da diversificação pode ser observado no pico de volatilidade em 2016, onde os risco da carteira 9 foi de aproximadamente 2,8%, enquanto a BBSE3 apresentou volatilidade de aproximadamente 4,5%. O risco da carteira pode ser comparado com os das ações da Natura e CCR Rodovias nas figuras abaixo respectivamente:

Figura 4.10: Estimativa de Risco Carteira 9 e NATU3

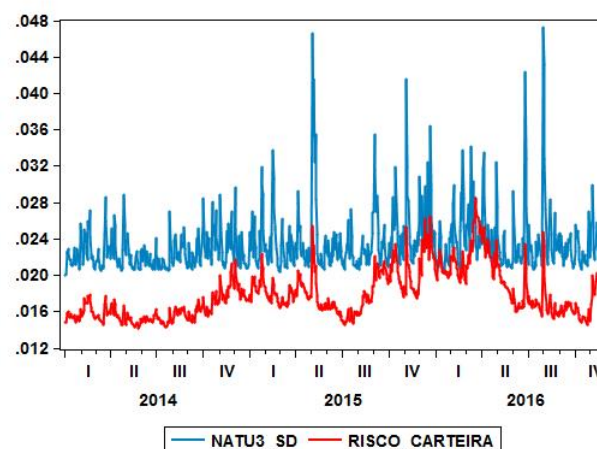
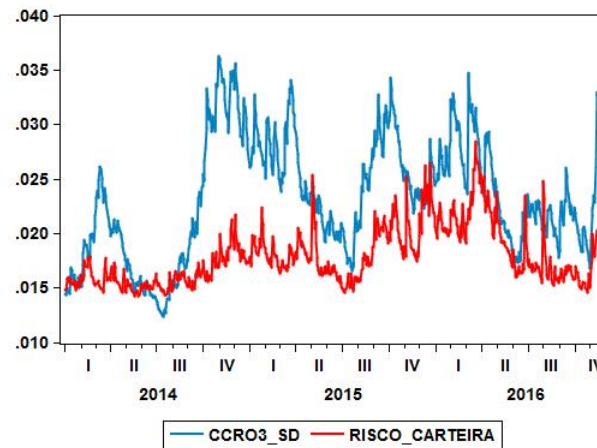
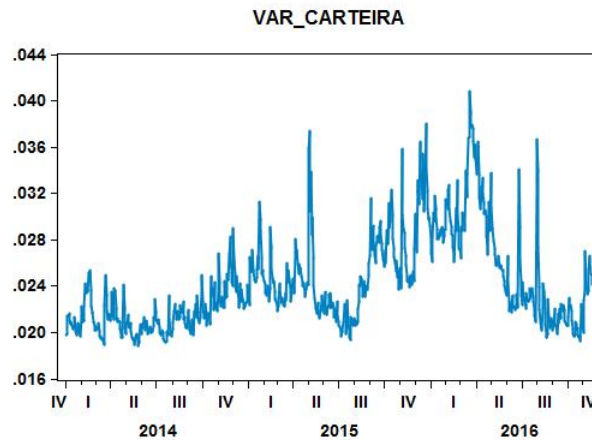


Figura 4.11: Estimativa de Risco Carteira 9 e CCRO3



Nas figuras acima a volatilidade do portfólio (linha vermelha), apresenta-se constantemente abaixo da volatilidade dos ativos individuais. Comparada as estimativas de risco da carteira, com os ativos individualmente, é importante ressaltar que durante todo o período de estimativa de risco do portfólio, os pesos utilizados para cada ativo são os pesos ótimos para o dia 18/11/2016 com base na volatilidade de longo prazo (equação 3.27), portanto, para que a volatilidade da carteira seja mínima em todo o período calculado, seria necessário a manutenção desta carteira comprando e vendendo ativos afim de manter sempre os pesos que minimizam o risco. Devido aos altos custos de manutenção da carteira, é improvável que o investidor mantenha sempre a carteira ótima. Tendo conhecimento deste fato, no entanto, viu-se a necessidade de alocar a quantidade de recursos para cada ativo com base em procedimentos matemáticos e não por critérios subjetivos, visto que estes não podem ser reproduzidos por outros investidores. Abaixo figura com estimativa para o VaR da carteira 9 conforme equação (3.32).

Figura 4.12: Value at Risk para Carteira 9



O VaR da carteira neste trabalho pressupõe que a volatilidade segue um distribuição normal, este pressuposto permite que seja feita inferências probabilísticas a respeito do risco da carteira. Observando a figura acima, podemos inferir que para o dia 18/11/2016 (última observação do gráfico) há uma probabilidade de 95% de que a perda do investimento na carteira 9 não ultrapasse 2,41%, dito de outra forma, se o investidor tivesse aplicado 100 reais na carteira 9 no dia 18 de novembro, comprando 48,39 reais em ações da BB Seguridade, 42,85 reais em ações da Natura e 8,76 reais em CCR Rodovias (tabela 4.10) sua perda máxima esperada com uma chance de 95% seria de 2,41 reais.

Previsão da Volatilidade

Até agora foi apresentada as estimativas de volatilidade de janeiro de 2014 a 18 de novembro de 2016 que corresponde ao período de amostra. Esta etapa será dedicada a previsão de volatilidade com VaR para os próximos 10 dias para os ativos individualmente e para a carteira. A previsão de volatilidade para o portfólio foi feita utilizando a equação de risco da carteira 3.16, com as previsões individuais de risco de cada ativo e a correlação estimada para o dia 18 de novembro. A tabela abaixo sintetiza as previsões do VaR para cada ativo individualmente e para a carteira 9:

Tabela 4.14: Previsão Value at Risk

Previsão	Carteira 9	BBSE3	CCRO3	NATU3
18/11/2016	0.023893714	0.037428775	0.052877848	0.034687629
21/11/2016	0.024594393	0.037427859	0.052852287	0.037257424
22/11/2016	0.024862805	0.037426955	0.052826886	0.038216179
23/11/2016	0.025007114	0.037426064	0.052801643	0.038727174
24/11/2016	0.025091	0.037425185	0.052776557	0.039023506
25/11/2016	0.025140592	0.037424319	0.052751629	0.039199091
28/11/2016	0.025169943	0.037423466	0.052726856	0.039303783
29/11/2016	0.025187231	0.037422624	0.052702238	0.039366346
30/11/2016	0.025197309	0.037421794	0.052677775	0.039403773
01/12/2016	0.025203076	0.037420976	0.052653464	0.039426174
02/12/2016	0.025206265	0.03742017	0.052629306	0.039439586

Pela tabela acima fica claro as medidas de risco para cada ativo e para a carteira. Observando a tabela nota-se que o VaR previsto para a CCRO3 em geral é superior aos demais ativos, assim nesse período podemos afirmar que este ativo é o mais arriscado da carteira, ficando visível porque após efetuar o processo de otimização que minimiza os risco, o peso ótimo desse ativo é inferior aos demais. As ações da BBSE3 e da NATU3 estão praticamente empatadas em relação ao risco até o dia 21/11/2016, após esse dia o VaR da NATU3 aumenta em relação ao da BBSE3, dessa forma, para esse período os retornos da BBSE3 são os menos voláteis da carteira.

Caso o investidor tenha comprado essa carteira no dia 18/11/2016, este poderia esperar um risco previsto de 2,52% com uma probabilidade de 95% para o dia 02/12/2016, ou seja, caso ele tenha investido 100 reais na carteira 9 no dia 18 de novembro, a perda máxima que ele pode esperar no dia 02 de dezembro com uma probabilidade de 95% é de 2,52 reais. A tendência do risco previsto na tabela acima é de atingir um equilíbrio de longo prazo, apresentado na tabela 4.7.

Esta seção teve por objetivo as estimativas de risco individuais de cada ativo e risco da carteira, cada seção neste trabalho corresponde a uma etapa da análise de portfólio, sendo assim, iniciamos com a seleção dos ativos para então efetuarmos a estimativa de peso ótimo, retorno esperado e análise de risco. Para cada ativo como para o portfólio nesta seção foi calculada a estimativa de volatilidade (3.23), esta por sua vez foi utilizada no cálculo das estimativa VaR (3.31 e 3.32). O Value at Risk é uma medida de risco eficiente em condições normais de mercado, podendo ser utilizado na comparação de risco entre diferentes instrumentos financeiros, mensuração de diferentes tipos de risco (risco de mercado, estratégico e financeiro), além de ser de fácil compreensão pelo investidor. No

entanto, o VaR não considera liquidez dos ativos e diferentes posições de mercado, ainda que sua estimativa de risco seja razoável no curto prazo, no longo prazo esta pode ser pouco confiável não mensurando adequadamente o verdadeiro risco o qual o investidor está exposto. Portanto, para uma estimativa mais precisa do risco dos ativos individuais ou da carteira, é necessário o uso de métodos que incluem teste de stress e quantificação do risco em situações anormais de mercado, além do uso de outras distribuições de probabilidade que se adequem mais precisamente aos dados. Concluída a análise de risco a próxima seção se encarga da análise da carteira 9 em períodos anteriores ou *backtest*.

4.4 Teste de Performance Retroativa *backtest*

Nesta seção será realizado o teste retroativo em 12 meses, de novembro de 2015 até o final de outubro de 2016, sob duas condições: com o balanceamento mensal do portfólio e sem balanceamento. Neste trabalho foi adotado o balanceamento com frequência mensal para fins didáticos, porém, este pode ser feito de acordo com a frequência considerada mais adequada pelo investidor. O balanceamento mensal consiste que a cada mês será comprado ou vendido ações das empresas da carteira 9, afim de manter a carteira com o peso ótimo todos os meses, neste caso, peso ótimo significa manter a carteira com o menor risco, para isso foram calculados os pesos ótimos mês a mês. Sem o balanceamento mensal será utilizado o peso ótimo encontrado no dia 18 de novembro de 2016 para todo o período sem compras adicionais ou venda de ações do portfólio, assim como na carteira balanceada serão efetuadas somente negócios para manter a proporção ótima dos ativos na carteira. A manutenção diária da carteira para manter os pesos ótimos é muito dispendiosa na prática, porém, este *backtest* foi realizado para verificação de ajustamento da carteira em relação ao índice e noção de risco do portfólio. Com balanceamento para cada mês o peso ótimo será calculado por programação quadrática utilizando o risco de longo prazo (tabela 4.7) para cada ativo, e a correlação entre os ativos do primeiro dia de cada mês. Os pesos ótimos da carteira para cada mês pode ser visualizado na tabela abaixo:

Tabela 4.15: Pesos ótimos

Mês	BBSE3	NATU3	CCRO3
nov/15	45,87%	43,95%	10,18%
dez/15	45,24%	44,15%	10,61%
jan/16	46,13%	42,89%	10,98%
fev/16	48,66%	44,90%	6,43%
mar/16	48,29%	44,33%	7,37%
abr/16	48,22%	44,66%	7,11%
mai/16	41,39%	41,19%	17,42%
jun/16	45,96%	38,53%	15,51%
jul/16	48,30%	40,94%	10,76%
ago/16	44,36%	43,29%	12,36%
set/16	47,18%	41,64%	11,19%
out/16	47,89%	43,54%	8,57%

Nota-se pela tabela acima que os pesos para os ativos na carteira permaneceram aproximadamente os mesmos para cada mês no período especificado. Em alguns determinados meses a participação das ações da CCR Rodovias dobrou na carteira e em outros manteve-se em torno de 7% a 10%.

Na primeira etapa do *backtest* será observado o retorno da carteira entre novembro de 2015 e novembro de 2016 com o balanceamento mensal e sem o balanceamento mensal. Como a carteira 9 é uma carteira cointegrada ao índice MSCI Brazil (*mxbr index*), a comparação dos retornos poderá fornecer uma estimativa de ajustamento da carteira, ou seja, se no longo prazo a carteira 9 possui desempenho parecido com o do *benchmark* escolhido. A figura abaixo mostra os retornos do índice MSCI Brazil da carteira 9 com balanceamento mensal e em seguida a figura com os retornos do índice e da carteira sem balanceamento mensal para o período especificado.

Figura 4.13: Teste Retroativo: Retorno índice e Carteira 9 balanceada

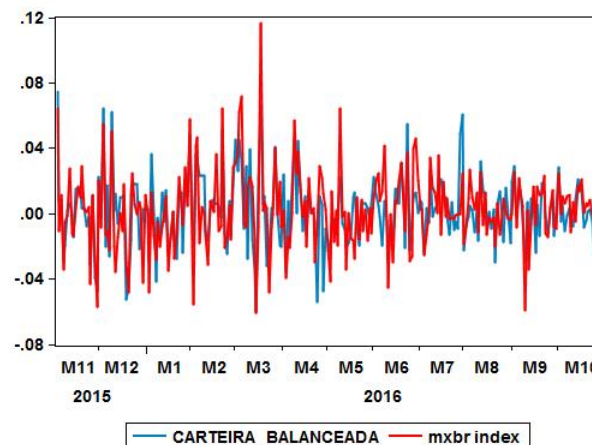
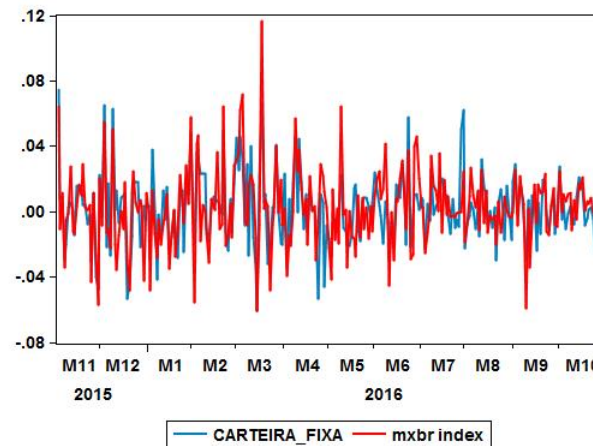


Figura 4.14: Teste Retroativo: Retorno índice e Carteira 9 fixa



Pelas figuras acima podemos notar que os retornos da carteira balanceada e fixa em comparação ao índice não possuem diferenças significativas, para uma análise mais detalhada da relação entre as carteiras e o *benchmark* um modelo de regressão linear pode ser apropriado. Nas duas tabelas abaixo encontram-se os modelos de regressão linear, sendo o primeiro com os retornos do índice MSCI Brazil como variável dependente contra os retornos da carteira balanceada e o segundo os retornos do índice contra os retornos da carteira fixa, em ambos os modelos as carteiras são variáveis independentes.

Tabela 4.16: Modelo Regressão - Carteira Balanceada

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Carteira 9	0.793122	0.048054	16.50470	0.0000
R-squared	0.506848	Mean dependent var		0.002338
Adjusted R-squared	0.506848	S.D. dependent var		0.023620
S.E. of regression	0.016587	Akaike info criterion		-5.356568
Sum squared resid	0.071534	Schwarz criterion		-5.342911
Log likelihood	700.0321	Hannan-Quinn criter.		-5.351078
Durbin-Watson stat	1.986758			

Tabela 4.17: Modelo Regressão - Carteira Fixa

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Carteira 9	0.784967	0.048054	16.50470	0.0000
R-squared	0.502326	Mean dependent var		0.002338
Adjusted R-squared	0.502326	S.D. dependent var		0.023620
S.E. of regression	0.016663	Akaike info criterion		-5.347440
Sum squared resid	0.072190	Schwarz criterion		-5.333783
Log likelihood	698.8409	Hannan-Quinn criter.		-5.341950
Durbin-Watson stat	1.975473			

No modelo com a carteira balanceada, o beta da regressão é de aproximadamente 0,79, enquanto que pelo modelo com a carteira não balanceada o beta é de aproximadamente

0,78, a diferença entre os beta é insignificante, sendo assim, com base nos betas da carteiras em relação ao índice MSCI Brazil, podemos afirmar que não existe diferença significativa entre a carteira balanceada e a carteira não balanceada. Em geral as estatísticas dos modelos lineares estão muito próximas e ambos os modelos apresentam coeficientes significativos e ausência de autocorrelação nos resíduos, com o beta em torno de 0,79 e um erro padrão de aproximadamente 0,04 podemos afirmar que a carteira 9 é em média menos arriscada que o índice de mercado, a situação oposta poderia ser visualizada caso o beta da carteira fosse superior a um, nesse caso, a estimativa de risco do portfólio seria superior comparada ao índice.

Para verificar se os retornos da carteira acompanham os retornos do índice como desejado quando efetuados os teste de cointegração, podemos verificar a normalidade dos resíduos dos modelos para o período em que estes foram estimados, caso os resíduos sejam normamente distribuídos, podemos dizer com certa segurança que a diferença entre os retornos da carteira e os retornos do índice são resíduos aleatórios frutos de determinados eventos que geram eventuais choques no mercado. Os resíduos normais podem ser considerados “saudáveis” por representarem o bom ajustamento da carteira em relação ao *benchmark*, visto que este ajustamento não pode ser perfeito. Abaixo o histograma dos resíduos do modelo com a carteira balanceada e fixa acompanhado do teste de normalidade.

Figura 4.15: Histograma Resíduos Modelo Carteira 9 balanceada

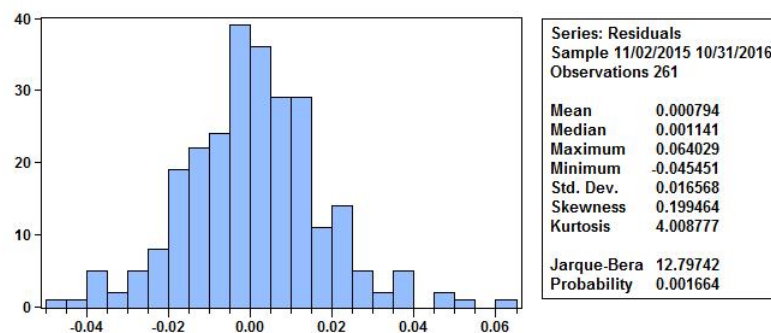
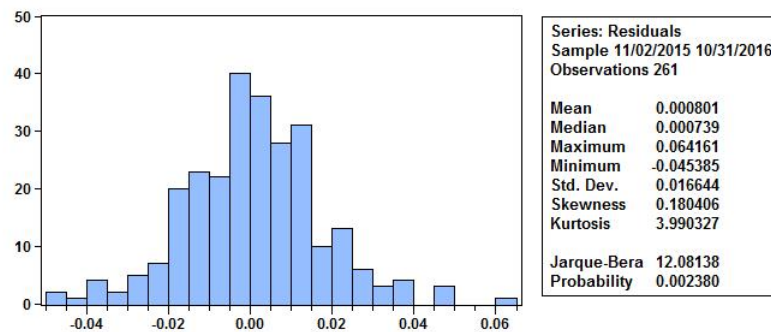


Figura 4.16: Histograma Resíduos Modelo Carteira 9 fixa



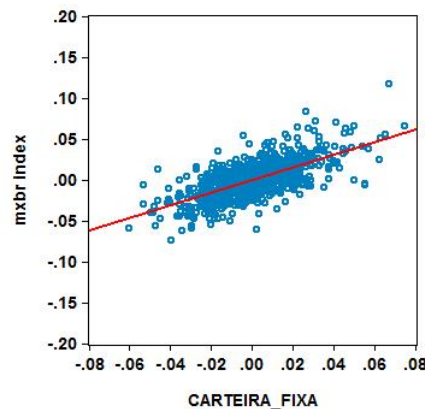
Pelo teste de normalidade Jarque-Bera (JB) que segue uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade (Sartoris, 2013), notamos que pela estatística JB apresentada acima em torno de 12, nenhum dos modelos especificado apresenta resíduos normalmente distribuídos já que o valor tabelado para o nível de 10% de significância é de 4,61. A presença de autocorrelação e heterocedasticidade podem influenciar de forma significativa na normalidade dos resíduos. Com a estatística de Durbin-Watson próxima a dois em ambos os modelos, a tabela a seguir mostra os resultados do teste ARCH LM com 12 defasagens para heterocedasticidade condicional sobre os resíduos.

Tabela 4.18: Teste ARCH LM - Heterocedasticidade Condicional

Estatística	n*R2	p-valor
Modelo Balanceado	15.62614	0.2090
Modelo Fixo	15.46158	0.2172

Pela tabela acima, não podemos rejeitar a hipótese nula de inexistência de heterocedasticidade condicional nos dados, já que o valor calculado para o modelo balanceado e fixo é de 15,62 e 15,46 respectivamente e o valor tabelado é de 18,55 ao nível de 10% de significância pela distribuição qui-quadrado. Visto que a heterocedasticidade condicional e a autocorrelação são inerentes a séries de dados financeiras, resíduos que apresentem estatística Jarque-Bera aproximadamente 12 podem ser considerados normalmente distribuídos o suficiente para que o modelo seja bem ajustado, dito de outra forma, a carteira 9 tem seu desempenho muito próximo ao do índice MSCI Brazil a não ser por choques aleatórios eventuais. A figura abaixo mostra o gráfico de dispersão entre retornos do MSCI Brazil e carteira 9 para o modelo fixo.

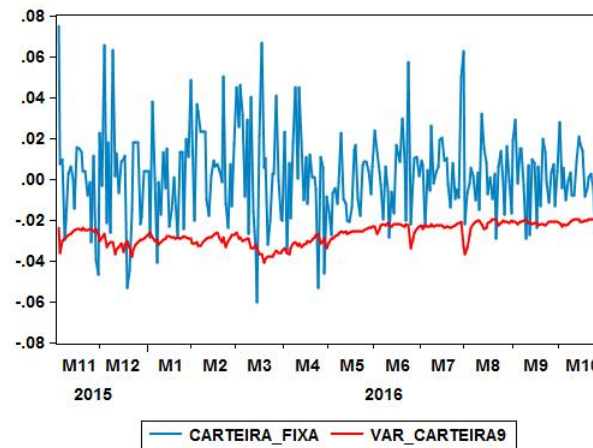
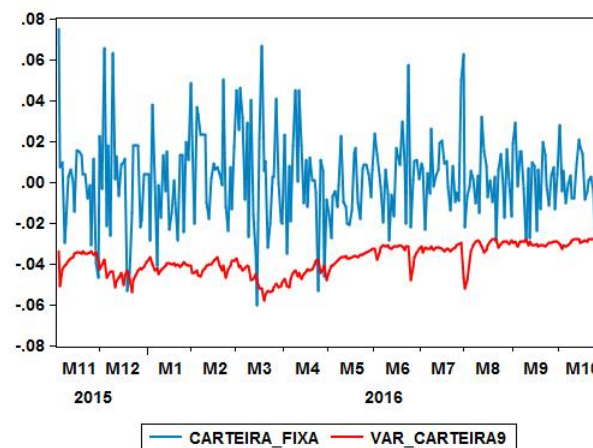
Figura 4.17: Dispersão Retorno MSCI versus Carteira 9



Nota-se que o ajustamento dos dados a linha de regressão é bastante razoável, dessa forma, os resíduos desse modelo podem ser considerados aleatórios, e o retorno da carteira fiel ao retorno do índice.

Teste Retroativo da Volatilidade

Analísado o ajustamento da carteira em relação ao *benchmark*, neste tópico é feito o teste retroativo do Value at Risk da carteira fixa, de forma a avaliar o grau de precisão das estimativas de risco. Como dito anteriormente o valor em risco mensura a perda máxima com 95% de chance em condições normais de mercado, neste tópico será calculada também a perda máxima com 99% de chance, em buscar de indentificar as vezes em que a perda realizada foi superior a perda calculada pelo VaR. Através de uma distribuição de probabilidade binomial mensuramos quantas vezes a perda realizada pode acontecer em períodos futuros. As figuras abaixo comparam os retornos e o VaR das carteira fixa a 95% e 99% respectivamente para o período de novembro de 2015 a outubro de 2016.

Figura 4.18: Teste Retroativo VaR Carteira 9 - $\alpha = 95\%$ Figura 4.19: Teste Retroativo VaR Carteira 9 - $\alpha = 99\%$ 

Analisando as figuras acima o teste retroativo consiste em indentificar os períodos em que a linha azul que representa os retornos esteve abaixo da linha vermelha representando a perda máxima estimada a uma probabilidade de 95% e 99%, assim, todas as vezes que a linha vermelha foi ultrapassada para baixo pela linha azul, significa que a perda da carteria foi superior ao esperado, e os modelos de risco não estimaram a incerteza adequadamente naquele momento. Fica claro na comparação entre as figuras acima, que a estimativa de perda máxima a 99% é ultrapassada em número menor de observações que a estimativa a 95%, isso se deve pelo fato de que quanto maior a probabilidade maior será o intervalo de confiança, assim a estimativa de risco a 99% será maior comparada a estimativa a 95%. A tabela 4.7 mostra o VaR de longo prazo a uma probabilidade de 95%, a tabela abaixo compara a estimativas para o risco de longo prazo a 99% e 95%.

Tabela 4.19: Value at Risk de Longo prazo

Ativos	VaR 99%	VaR 95%
BBSE3	5,276%	3,736%
NATU3	5,531%	3,917%
CCRO3	6,908%	4,892%

Para o período de novembro de 2015 a outubro de 2016 existem 261 observações de retornos para os ativos da carteira 9, sendo assim, calculou-se os retornos diários da carteira 9 como sendo a soma dos retornos ponderados de cada ativo (4.3) com as ponderações da tabela 4.10 e calculou-se também o VaR a 99% e 95% para o mesmo período para identificar o número de exceções indicado como as ultrapassagens nas figuras 4.17 e 4.18. A tabela abaixo resume o número de exceções para o VaR a 99% e 95%.

Tabela 4.20: Exceções VaR a 99% e 95%

Ativos	VaR 99%	VaR 95%
Observações	261	261
Exceções	8	19
Média (Exceções)	2,61	13,05
Desvio Padrão (Exceções)	1,60	3,52
Intervalo Confiança	0 e 6,75	6,14 e 19,95

Como perdas e lucros são variáveis aleatórias, só podemos fazer inferências probabilísticas sobre estas, dessa forma, como as exceções seguem a distribuição de probabilidade binomial (Alexander, 2005), a tabela acima mostra o número de exceções, a média, desvio padrão e intervalo de confiança. Pelo VaR a 95% observa-se que o número de exceções é superior comparado ao VaR a 99%, como dito anteriormente isso se deve ao maior intervalo de confiança da estimativa de risco, ou seja, o intervalo calculado pelo VaR a 99% é bem superior ao de 95%, assim a chance de haver exceções com o modelo a 99% é inferior comparado ao de 95%. Pelo modelo VaR a 99% a média de exceções é de 2,61 enquanto para o VaR a 95% é de 13,05, o desvio padrão é de 1,60 e 3,52 exceções respectivamente para o período considerado. Analisando o intervalo de confiança na última linha da tabela, temos uma probabilidade de 95% de que haja entre 0 e 6,75 exceções para o VaR a 99% e que haja entre 6,14 e 19,95 exceções para o VaR a 95%.

Pelas estimativas VaR apresentadas na tabela acima, o período de novembro de 2015 a outubro de 2016 contendo 261 observações apresentaram um número razoável de exceções, neste caso, podemos dizer que o modelo de risco está ajustado adequadamente para condições normais de mercado considerando estimativas de risco de curto prazo.

Portanto, as estimativas VaR são mais eficientes no curto prazo, no longo prazo outras medidas de risco podem trazer resultados mais satisfatórios além do teste de stress da carteira para prevenção de eventos que podem causar retornos atípicos no portfólio. Para prevenção de retornos atípicos e fortes oscilações do mercado o investidor pode fazer um seguro da sua carteira (*hedge*) tema da próxima seção.

Teste Retroativo do Retorno

Caso o investidor tivesse adquirido a carteira 9 no período de *backtest* comprando cada ativo da carteira na respectiva proporção ótima (tabela 4.10) ao preço de fechamento do dia 2 de novembro de 2015 e desejasse saber qual o retorno total adquirido no dia 31 de outubro de 2016, este poderia consultar a tabela abaixo.

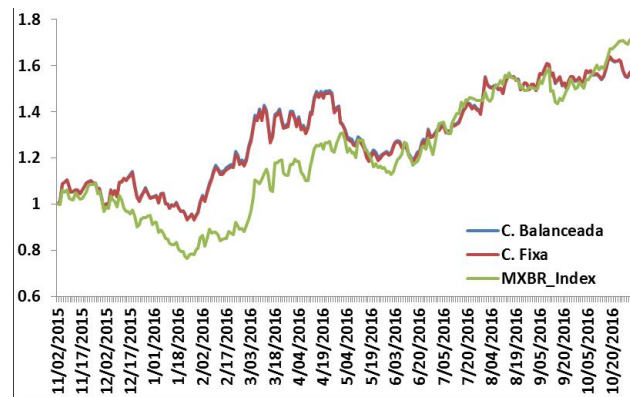
Tabela 4.21: Retorno Carteira 9

Ativos	02/11/2015	31/10/2016	Proventos	% Retorno
Preço BBSE3	22,90	30,66	1,67	41,17%
Preço NATU3	26,60	32,14	0,29	21,91%
Preço CCRO3	12,12	17,35	0,33	45,87%
Retorno Carteira 9	-	-	-	33,31%
MSCI Brazil Index	1133,19	1882,26		66,10%

A tabela acima resume o preço de compra dos ativos em novembro de 2015 e o preço 12 meses depois, junto com os dividendos ou juros sobre capital próprio pagos no período. O retorno total individual de cada ativo encontra-se na última coluna da tabela, este retorno incorpora a variação de capital acrescida dos proventos, por fim na última linha o retorno total da carteira 9 devidamente ponderado entre as participações dos ativos. É importante ficar claro que o retorno considerado na tabela acima está baseado no pressuposto de que diariamente o investidor reajusta a quantidade de ações de cada empresa no seu portfólio afim de manter os pesos ótimos. É sabido que a manutenção diária do portfolio é muito custosa na prática, no entanto, facilita o cálculo do retorno para o período considerado.

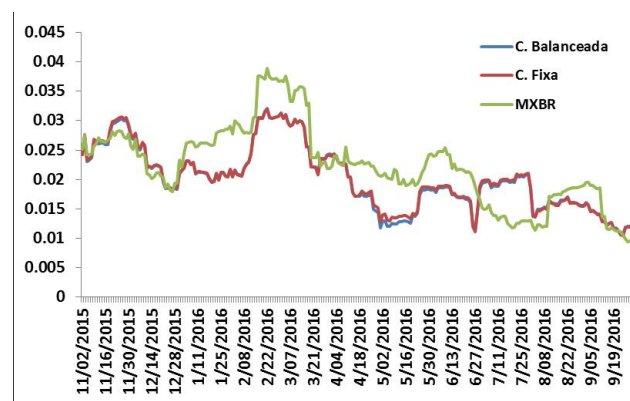
A comparação entre os retornos do *benchmark* com a carteira 9 fixa e balanceada pode ser melhor analisado graficamente. A figura abaixo mostra os retornos acumulados do índice MSCI Brazil e da carteira 9 para o período de novembro de 2015 ao final de outubro de 2016.

Figura 4.20: Retorno Acumulado MSCI Brazil e Carteira 9



A diferença entre os retornos do índice e do *benchmark* para o período analisado é pequena, no período de novembro de 2015 a abril de 2016 a carteira 9 tanto fixa como balanceada apresentou retorno acima do retorno do *benchmark*, após esse período a carteira acompanha mais precisamente o desempenho do índice. O desempenho da carteira fixa e balanceada se mostrou bastante parecido pelo fato de o risco utilizado para encontrar os pesos ótimos tanto na carteira fixa como na balanceada é o risco de longo prazo, visto que o período de *backtest* é de um ano. O desempenho muito próximo entre o MSCI Brazil e carteira 9 na figura acima, reforça os resultados de cointegração entre índice e carteira apresentados anteriormente. A próxima figura compara o desvio padrão dos retornos da carteira 9 fixa e balanceada com o desvio padrão dos retornos no MSCI Brazil Index no período especificado acima.

Figura 4.21: Desvio Padrão do Retorno Índice MSCI Brazil e Carteira 9



Nota-se pela figura acima que no período especificado, o desvio padrão ou incerteza quanto aos retornos da carteira 9 mostraram-se inferior ao desvio padrão do índice para o período de dezembro de 2015 a junho de 2016. É importante ressaltar que esta configuração

de risco não é usualmente observada, já que o índice possui um número superior ao da carteira 9 de ativos, e portanto deveria diversificar o risco de forma mais eficiente.

Pelo teste retroativo efetuado, a carteira 9 apresentou um ajuste razoável junto ao índice MSCI Brazil, as expectativas de risco em geral se mantiveram no intervalo esperado e o número de exceções é baixo. Quanto ao retorno este apresentou resultado de 33,31%, retorno razoavelmente acima do mínimo exigido para 12 meses de 20%, no entanto, retorno passado não é garantia de retorno futuro.

4.5 Taxa Ótima de *Hedge*

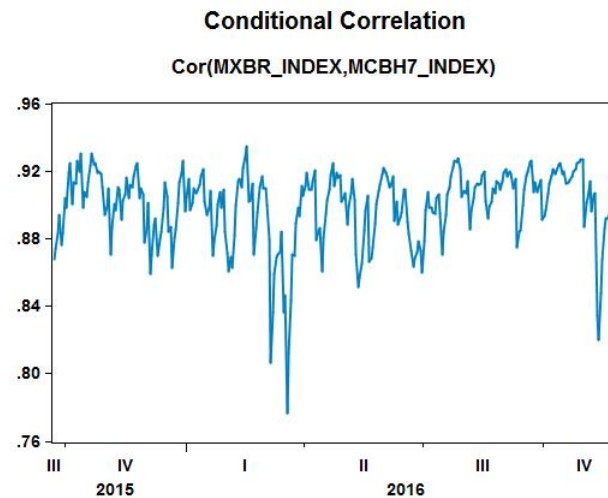
Nesta seção será calculado a taxa ótima de *hedge* para a carteira 9 utilizando o futuro do índice MSCI Brazil, visto que a carteira 9 é cointegrada a este índice. Utiliza-se o *hedge* afim de reduzir fortes oscilações no mercado à vista, seria o mesmo que um seguro dos ativos adquiridos à vista, dessa forma, vende-se contratos futuros do ativos à vista para que caso haja perdas nas posições à vista haverá ganhos nas posições vendidas em contratos futuros. A questão básica é: qual a porcentagem da carteira à vista deve ser adquirida em forma de contratos futuros para que o risco seja minimizado. A taxa ótima de *hedge* que minimiza o risco é dada por (Freitas, 2011):

$$\beta = \frac{\sigma_s \sigma_f \rho_{s,f}}{\sigma_f^2} \quad (4.4)$$

onde σ_s é o desvio padrão dos retornos do índice a vista, σ_f é o desvio padrão dos retornos do índice futuro e $\rho_{s,f}$ é a correlação dos retornos entre os índices a vista e futuro. Dessa forma no numerador temos a covariância entre os retornos do índice a vista e futuro e no denominador temos a variância dos retornos do índice futuro.

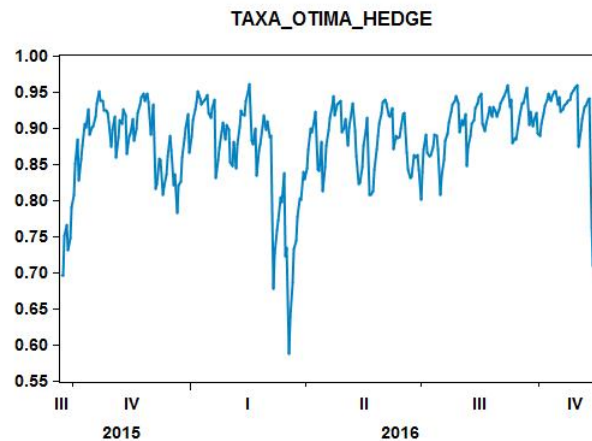
Para o cálculo da taxa ótima de *hedge* que minimiza o risco do portfólio foi utilizado um modelo GARCH mutivariado (3.41) para cálculo das covariâncias e variância entre os ativos. O índice a vista é o MSCI Brazil *index* e como contrato futuro é utilizado o MSCI Brazil para março de 2017. Na figura abaixo temos a correlação entre o índice MSCI a vista e futuro para março de 2017.

Figura 4.22: Correlação índice MSCI a vista e futuro



A correlação entre os retornos dos ativo é bastante alta próxima a 0,9 na maior parte do tempo. Na próxima figura encontra-se a taxa ótima de *hedge* calculada por 4.4 de 22 de setembro de 2015 a 18 de novembro de 2016.

Figura 4.23: Taxa Ótima de Hedge



Dessa forma para reduzir sua exposição ao risco o investidor pode vender contratos futuros do índice MSCI Brazil com o objetivo de fazer um seguro contra as fortes oscilações que a carteira 9 está sujeita. Visto que a carteira 9 é cointegrada ao índice MSCI Brazil o seguro desta funciona automaticamente como seguro da carteira 9. A taxa ótima de *hedge* calculada neste trabalho serve de exemplo de como o investidor pode proteger a carteira cointegrada utilizando o índice a qual esta indexada, no entanto, existem outros métodos para cálculo da taxa ótima de *hedge* mais sofisticados e que apresentem resultados mais

precisos.

4.6 Considerações Finais

O problema do portfólio pode ser resumido em quantos e quais ativos escolher para a carteira, estimativa de risco e estimativa de retorno. O processo de otimização de Markowitz apresenta resultados teóricos satisfatórios, no entanto, na prática a despesa de manter a carteira ótima devido a mudanças diárias de preço e correlações entre os ativos, pode ser bastante elevada de forma a não restar nenhum ganho ao investidor. Neste trabalho apresentou-se a cointegração como uma alternativa ao processo de escolha com base na fronteira eficiente de Markowitz, a cointegração busca relações de longo prazo entre um conjunto de ativos denominado carteira e um *benchmark* escolhido pelo investidor. A vantagem do processo de cointegração consiste na tendência de longo prazo, ou seja, a carteira cointegrada ao índice terá a mesma tendência que este, deixando de lado o uso de correlações entre índice e carteira para indexar um ao outro, sem contar que pode ser encontrado um determinado portfólio composto por três ou quatro ativos com a mesma tendência de longo prazo do índice, sem que haja a necessidade de compra de todas as ações do *benchmark* de forma a reproduzir o desempenho do mesmo. Como a análise de cointegração busca relações de estabilidade de longo prazo entre índice e carteira, a necessidade de revisão desta se reduz consideravelmente no curto prazo, diminuindo os gastos com manutenção do portfólio. Junto com a análise de cointegração, foram feitas estimativas de risco e retorno de forma a mensurar o risco máximo e o retorno esperado para a carteira.

A cointegração é um método que apresenta bons resultados para a administração passiva de carteiras de longo prazo, no entanto, a decisão dos pesos da carteira é um problema inerente a qualquer processo de decisão, mesmo com a carteira cointegrada algum procedimento de otimização deve ser utilizado para encontrar os pesos ótimos. Neste trabalho sugeriu-se dois processos de otimização, sendo o primeiro por Mínimos Quadrados Ordinários e o Segundo por Programação Quadrática. Encontrando os pesos ótimos o antigo problema de manutenção da carteira para mante-lá ótima vem a tona e os riscos e retornos estimados não podem se corretamente mensurados na ausência do pressuposto de correção diária dos pesos.

Portanto, buscando aliar a análise contábil das empresas com os métodos quantitativos, utilizou-se o retorno sobre o patrimônio para a escolha de empresas economicamente rentáveis, após essa seleção os modelos estatísticos de cointegração, risco e retorno indicaram qual é a carteira mais cointegrada e qual o risco e retorno esperado. Dessa forma, este trabalho buscou na ampla literatura de finanças e estatística reunir um conjunto de procedimentos que auxilie o investidor na tomada de decisão em investimentos de renda variável, partindo do pressuposto que este não tem poder de mercado e informações privilegiadas a sua disposição. A utilidade dos procedimentos aqui apresentados, não diz respeito em selecionar carteiras com retorno acima da média do mercado, mas sim em proporcionar ao investidor um conjunto de etapas que auxiliem no investimento em bons ativos no longo prazo, e que apresentem um retorno mínimo exigido. Aplicando a teoria na prática, este trabalho buscou bons resultados estimando uma carteira real com ativos reais, outros métodos e outros critérios podem ser empregados podendo encontrar melhores resultados e estimativas que reforcem ou contrastem com os resultados e procedimentos aqui apresentados.

REFERÊNCIAS

- Alexander, C. (2005). *Modelos de Mercado*. São Paulo, Brasil: Bolsa de Mercadorias e Futuros.
- Bodie et.al, Z. (2010). *Investimentos*. Porto Alegre, Brasil: AMGH.
- Bollerslev, U. (2001). *Escaping Satiation: The Demand Side of Economic Growth*. Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- Bueno, R. D. L. d. S. (2008). *Econometria de Séries Temporais*. São Paulo, Brasil: Cengage Learning.
- Duarte Junior, A. M. (2005). *Gestão de Riscos para Fundos de Investimentos*. São Paulo, Brasil: Prentice Hall.
- Elton et.al, E. J. (2012). *Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos*. Rio de Janeiro, Brasil: Elsevier.
- Fama, E. (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work.
- Freitas, B. W. (2011). Contratos futuros de açúcar: uma análise comparativa entre as estratégias de hedge. Master's thesis, Universidade Federal de Pernambuco.
- Gujarati, D. N. (2006). *Econometria Básica*. Rio de Janeiro, Brasil: Elsevier.
- Johnston, J. & DiNardo, J. (1997). *Métodos econométricos*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.
- Mishkin, F. S. (1998). *Moedas, Bancos e Mercados Financeiros*. Rio de Janeiro, Brasil: LTC Editora.
- Morettin, P. A. (2011). *Econometria Financeira*. São Paulo, Brasil: Blucher.
- Morettin, P. A. & Toloi, C. M. C. (2006). *Análise de Séries Temporais*. São Paulo, Brasil: Blucher.
- MSCI, M. S. C. I. (2016). *MSCI Brazil Index*. Technical report.
- Pinheiro, J. L. (2009). *Mercado de Capitais Fundamento e Técnicas*. São Paulo, Brasil: Atlas.

Pyndick, R. & Rubinfeld, D. L. (2004). *Econometria*. Rio de Janeiro, Brasil: Elsevier.

Sartoris, A. (2013). *Estatística e Introdução à Econometria*. São Paulo, Brasil: Saraiva.

APÊNDICE

Modelos de Risco

Estatísticas do Modelo de Volatilidade para BBSE3

Figura 24: Correlograma Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH BBSE3

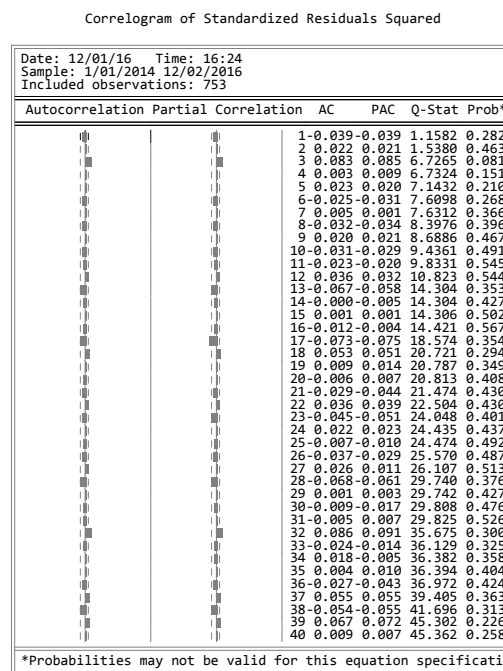
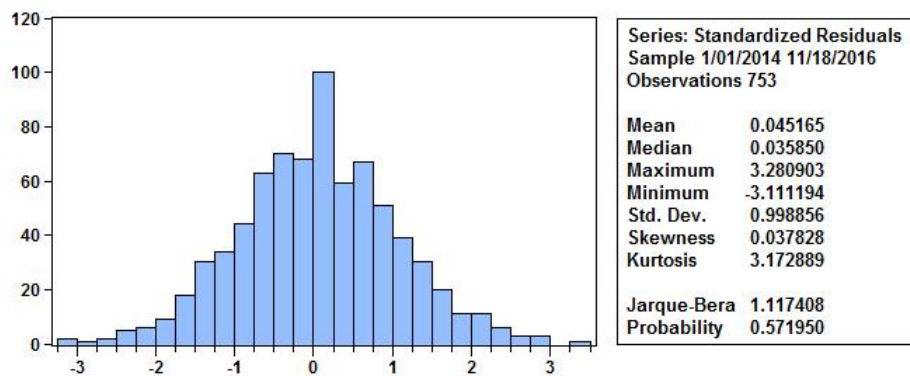


Figura 25: ARCH LM Test Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH BBSE3

Heteroskedasticity Test: ARCH				
F-statistic	0.894361	Prob. F(12,728)	0.5525	
Obs*R-squared	10.76528	Prob. Chi-Square(1)	0.5491	
Test Equation:				
Dependent Variable: WGT_RESID^2				
Method: Least Squares				
Date: 12/01/16 Time: 16:26				
Sample (adjusted): 1/17/2014 11/18/2016				
Included observations: 741 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.957519	0.134663	7.110493	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.039151	0.037040	-1.057001	0.2909
WGT_RESID^2(-2)	0.023091	0.037062	0.623041	0.5335
WGT_RESID^2(-3)	0.087153	0.037073	2.350825	0.0190
WGT_RESID^2(-4)	0.008804	0.037214	0.236581	0.8130
WGT_RESID^2(-5)	0.021386	0.037216	0.574636	0.5657
WGT_RESID^2(-6)	-0.029495	0.037219	-0.792460	0.4284
WGT_RESID^2(-7)	0.001838	0.037420	0.049107	0.9608
WGT_RESID^2(-8)	-0.032051	0.037411	-0.856719	0.3919
WGT_RESID^2(-9)	0.018346	0.037441	0.489989	0.6243
WGT_RESID^2(-10)	-0.030475	0.037401	-0.814817	0.4154
WGT_RESID^2(-11)	-0.019309	0.037406	-0.516210	0.6059
WGT_RESID^2(-12)	0.033676	0.037585	0.895991	0.3706
R-squared	0.014528	Mean dependent var	1.001340	
Adjusted R-squared	-0.001716	S.D. dependent var	1.484711	
S.E. of regression	1.485985	Akaike info criter	3.647421	
Sum squared resid	1607.534	Schwarz criterion	3.728263	
Log likelihood	-1338.369	Hannan-Quinn crite	3.678588	
F-statistic	0.894361	Durbin-Watson stat	1.996091	
Prob(F-statistic)	0.552452			

Figura 26: Histograma Resíduos ARCH-GARCH BBSE3



Estatísticas do Modelo de Volatilidade para CCRO3

Figura 27: Correlograma Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH CCRO3

Correlogram of Standardized Residuals Squared

Date: 12/01/16 Time: 16:27
Sample: 1/01/2014 12/02/2016
Included observations: 753

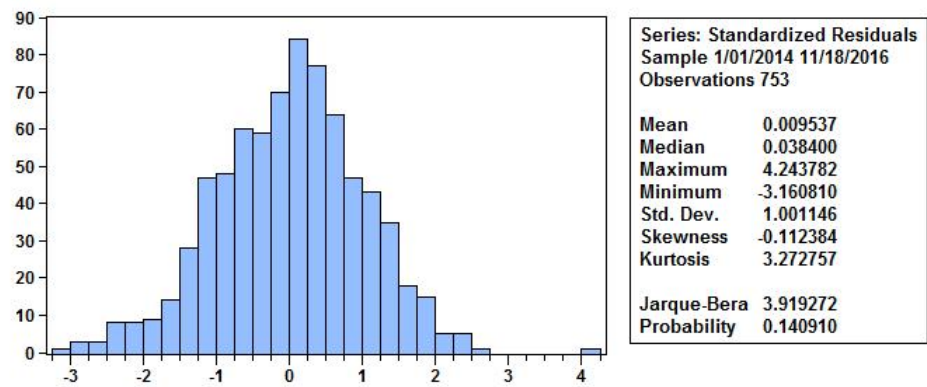
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
1-0.000-0.000	1-0.000	0.000	8.E-05	0.993	
2-0.031-0.031	2-0.031	0.7128	0.700		
3-0.004-0.004	3-0.004	0.7235	0.868		
4-0.035-0.036	4-0.035	1.6288	0.804		
5-0.005-0.004	5-0.005	1.6443	0.896		
6-0.043-0.041	6-0.043	3.0545	0.802		
7-0.001-0.001	7-0.001	3.0551	0.880		
8-0.001-0.000	8-0.001	3.0565	0.931		
9-0.005-0.005	9-0.005	3.0772	0.961		
10-0.014-0.012	10-0.014	3.2361	0.975		
11-0.007-0.007	11-0.007	3.2697	0.987		
12-0.021-0.024	12-0.021	3.6234	0.989		
13-0.017-0.016	13-0.017	3.8529	0.993		
14-0.015-0.018	14-0.015	4.0346	0.995		
15-0.019-0.018	15-0.019	4.3179	0.996		
16-0.008-0.006	16-0.008	4.3677	0.998		
17-0.003-0.002	17-0.003	4.3734	0.999		
18-0.005-0.006	18-0.005	4.3916	1.000		
19-0.049-0.046	19-0.049	6.2499	0.997		
20-0.004-0.002	20-0.004	6.2637	0.998		
21-0.007-0.003	21-0.007	6.2994	0.999		
22-0.008-0.006	22-0.008	6.3480	1.000		
23-0.020-0.018	23-0.020	6.6703	1.000		
24-0.133-0.133	24-0.133	20.390	0.674		
25-0.024-0.019	25-0.024	20.826	0.702		
26-0.031-0.023	26-0.031	21.577	0.712		
27-0.032-0.032	27-0.032	22.386	0.718		
28-0.004-0.009	28-0.004	22.397	0.763		
29-0.010-0.009	29-0.010	22.470	0.800		
30-0.023-0.011	30-0.023	22.880	0.820		
31-0.026-0.027	31-0.026	23.425	0.833		
32-0.069-0.076	32-0.069	27.151	0.711		
33-0.013-0.021	33-0.013	27.283	0.747		
34-0.003-0.010	34-0.003	27.292	0.786		
35-0.002-0.003	35-0.002	27.295	0.821		
36-0.034-0.025	36-0.034	28.186	0.821		
37-0.030-0.024	37-0.030	28.884	0.827		
38-0.014-0.015	38-0.014	29.049	0.851		
39-0.021-0.014	39-0.021	29.385	0.868		
40-0.036-0.031	40-0.036	30.390	0.864		

*Probabilities may not be valid for this equation specificati

Figura 28: ARCH LM Test Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH CCRO3

Heteroskedasticity Test: ARCH				
F-statistic	0.281417	Prob. F(12,728)	0.9921	
Obs*R-squared	3.421431	Prob. Chi-Square(1)	0.9918	
Test Equation:				
Dependent Variable: WGT_RESID^2				
Method: Least Squares				
Date: 12/01/16 Time: 16:29				
Sample (adjusted): 1/17/2014 11/18/2016				
Included observations: 741 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.062458	0.143245	7.417045	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	0.003263	0.037053	0.088069	0.9298
WGT_RESID^2(-2)	0.032089	0.037047	0.866147	0.3857
WGT_RESID^2(-3)	-0.000509	0.037057	-0.013746	0.9890
WGT_RESID^2(-4)	-0.028651	0.037058	-0.773133	0.4397
WGT_RESID^2(-5)	-0.010035	0.037072	-0.270685	0.7867
WGT_RESID^2(-6)	-0.042377	0.037710	-1.123771	0.2615
WGT_RESID^2(-7)	-0.000896	0.037863	-0.023655	0.9811
WGT_RESID^2(-8)	-0.001015	0.037858	-0.026804	0.9786
WGT_RESID^2(-9)	0.006083	0.037841	0.160743	0.8723
WGT_RESID^2(-10)	0.012788	0.037847	0.337875	0.7356
WGT_RESID^2(-11)	-0.008207	0.037833	-0.216937	0.8283
WGT_RESID^2(-12)	-0.025967	0.037843	-0.686176	0.4928
R-squared	0.004617	Mean dependent var	0.999673	
Adjusted R-squared	-0.011790	S.D. dependent var	1.506674	
S.E. of regression	1.515530	Akaike info criter	3.686795	
Sum squared resid	1672.093	Schwarz criterion	3.767638	
Log likelihood	-1352.958	Hannan-Quinn crite	3.717963	
F-statistic	0.281417	Durbin-Watson stat	2.000068	
Prob(F-statistic)	0.992084			

Figura 29: Histograma Resíduos ARCH-GARCH CCRO3



Estatísticas do Modelo de Volatilidade para NATU3

Figura 30: Correlograma Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH NATU3

Correlogram of Standardized Residuals Squared

Date: 12/01/16 Time: 16:33		Sample: 1/01/2014 12/02/2016		Included observations: 753	
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
1	0.020	0.020	0.3152	0.575	
2	0.023	0.023	0.7027	0.704	
3	0.027	0.028	1.2580	0.739	
4	0.017	0.016	1.4823	0.830	
5	0.013	0.012	1.6049	0.901	
6	0.008	0.008	1.6583	0.948	
7	0.040	0.041	2.8743	0.896	
8	0.000	0.002	2.8744	0.942	
9	0.000	0.001	2.8744	0.969	
10	0.013	0.015	2.9998	0.981	
11	0.037	0.037	4.0577	0.968	
12	0.010	0.011	4.1345	0.981	
13	0.001	0.005	4.1353	0.990	
14	0.025	0.026	4.6684	0.990	
15	0.012	0.014	4.7726	0.994	
16	0.051	0.049	6.7961	0.977	
17	0.027	0.028	7.3405	0.979	
18	0.008	0.007	7.3933	0.986	
19	0.057	0.055	9.8780	0.956	
20	0.004	0.001	9.8936	0.970	
21	0.015	0.014	10.067	0.978	
22	0.001	0.001	10.068	0.986	
23	0.040	0.038	11.321	0.980	
24	0.002	0.008	11.324	0.987	
25	0.104	0.103	19.699	0.762	
26	0.031	0.034	20.453	0.770	
27	0.015	0.009	20.624	0.804	
28	0.006	0.012	20.657	0.839	
29	0.021	0.015	21.015	0.859	
30	0.042	0.047	22.419	0.838	
31	0.015	0.013	22.605	0.863	
32	0.019	0.026	22.884	0.882	
33	0.021	0.020	23.223	0.897	
34	0.034	0.029	24.146	0.895	
35	0.016	0.025	24.345	0.912	
36	0.026	0.032	24.877	0.919	
37	0.022	0.021	25.256	0.928	
38	0.040	0.043	26.528	0.919	
39	0.033	0.020	27.380	0.919	
40	0.024	0.027	27.851	0.927	

*Probabilities may not be valid for this equation specificati

Figura 31: ARCH LM Test Quadrado dos Resíduos ARCH-GARCH NATU3

Heteroskedasticity Test: ARCH				
F-statistic	0.340065	Prob. F(12,728)	0.9816	
Obs*R-squared	4.130503	Prob. Chi-Square(1)	0.9810	
Test Equation:				
Dependent Variable: WGT_RESID^2				
Method: Least Squares				
Date: 12/01/16 Time: 16:34				
Sample (adjusted): 1/17/2014 11/18/2016				
Included observations: 741 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.037388	0.146610	7.075831	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	0.021467	0.037063	0.579202	0.5626
WGT_RESID^2(-2)	-0.024653	0.037051	-0.665391	0.5060
WGT_RESID^2(-3)	0.028499	0.037059	0.769022	0.4421
WGT_RESID^2(-4)	0.014895	0.037071	0.401792	0.6880
WGT_RESID^2(-5)	-0.013068	0.037070	-0.352530	0.7245
WGT_RESID^2(-6)	-0.007606	0.037055	-0.205261	0.8374
WGT_RESID^2(-7)	-0.041050	0.037051	-1.107934	0.2683
WGT_RESID^2(-8)	0.002531	0.037078	0.068256	0.9456
WGT_RESID^2(-9)	-0.002275	0.037081	-0.061350	0.9511
WGT_RESID^2(-10)	0.015847	0.037067	0.427521	0.6691
WGT_RESID^2(-11)	-0.036792	0.037065	-0.992639	0.3212
WGT_RESID^2(-12)	0.011197	0.037125	0.301589	0.7631
R-squared	0.005574	Mean dependent var	1.006336	
Adjusted R-squared	-0.010817	S.D. dependent var	1.904884	
S.E. of regression	1.915160	Akaike info criter	4.154867	
Sum squared resid	2670.185	Schwarz criterion	4.235709	
Log likelihood	-1526.378	Hannan-Quinn crite	4.186035	
F-statistic	0.340065	Durbin-Watson stat	1.998845	
Prob(F-statistic)	0.981616			

Figura 32: Histograma Resíduos ARCH-GARCH NATU3

